SEMINARUNTERLAGEN

ERHARD AICHINGER

1. Vorgangsweise in diesem Seminar

(1) Auswahl eines Themas.
(2) Literatursuche; Erarbeiten der interessanten Information.
(3) Vereinbarung eines Vortragstermins.
(4) Vorbereitung des Vortrags.
(5) Besprechung der Vorbereitung mit dem LVA-Leiter spätestens 3 Tage vor dem Vortragstermin.

2. Themen

2.1. Elementares über Funktionen.

(1) Zeigen Sie, dass sich jede endlichstellige Operation auf einer Menge A als Komposition von zweistelligen Operationen auf A schreiben lässt. [LN73]
(2) Sei $f : A^n \to A$, sodass f von allen Argumenten abhängt. Zeigen Sie, dass es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $a \in A$ gibt, sodass $f_i^a : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_i, \ldots, x_{n-1})$ von allen Argumenten abhängt. (Satz von Salomaa, [HM88])
(3) Sei $(A, +)$ eine endliche abelsche Gruppe, und sei $f : A \to A$ ein Gruppenendomorphismus von $(A, +)$ mit folgender Eigenschaft:

für alle $a, b \in A$ gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$, sodass $f(a+b)-f(a) = z*b$.

Zeigen Sie: es gibt ein $y \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $a \in A$ gilt: $f(a) = y * a$.

2.2. Polynomvollständigkeit.

(4) Zeigen Sie, dass jeder endliche Körper k-polynomvollständig für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.
(5) Zeigen Sie, dass jede endliche, einfache, nichtabelsche Gruppe polynomvollständig ist. [LN73, Aic95]
(6) Bestimmen Sie $|P(S_3)|$. [Aic02b]
(7) Kaarlis Erweiterungsprinzip für kongruenzerhaltende Funktionen im Spezialfall $\mathbb{Z}$ (cf. [Kaa83]):

Sei T eine endliche Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Eine Funktion $f : T \to \mathbb{Z}$ heißt *kompatibel* genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in T$ mit $x_1 \neq x_2$ der Quotient $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ganzzahlig ist.

Date: March 10, 2011.

Sei f eine beliebige kompatible Funktion auf einer endlichen Teilmenge T von $\mathbb{Z}$, und sei $z \in \mathbb{Z} \setminus T$. Zeigen Sie: Es gibt eine kompatible Funktion $g : T \cup \{z\} \to \mathbb{Z}$, sodass $g(t) = f(t)$ für alle $t \in T$.

Hinweis: Die Funktion g heißt *kompatible Erweiterung* von f auf $T \cup \{z\}$. Sie müssen nur ein passendes $g(z)$ finden. Stellen Sie dazu ein System von Kongruenzen auf, von dem $g(z)$ Lösung sein muss, und zeigen Sie, dass dieses System lösbar ist.

(8) Die Begriffe "affin vollständig", "lokal affin vollständig", "strikt affin vollständig": Geben Sie Beispiele dafür, dass diese Begriffe nicht äquivalent sind. [Pil83, KP01, AI04, Aic02a]

(9) Zeigen Sie, dass für jede Ω-Gruppe A gilt: $C(A) = L_2P(A)$. [Pil83, p.238]

(10) Lokale Polynomfunktionen: [LN79, Aic97]

References

[AI04] E. Aichinger and P. M. Idziak, *Polynomial interpolation in expanded groups*, J. Algebra **271** (2004), no. 1, 65–107.

[Aic95] E. Aichinger, *Local interpolation near-rings as a frame-work for the density theorems*, Contributions to General Algebra, vol. 9, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien - Verlag B.G. Teubner, Stuttgart, 1995, pp. 27 – 36.

[Aic97] ———, *Local polynomial functions on the integers*, Riv. Mat. Univ. Parma (5) **6** (1997), 169–177.

[Aic02a] ———, *2-affine complete algebras need not be affine complete*, Algebra Universalis **47** (2002), no. 4, 425–434.

[Aic02b] ———, *The polynomial functions on certain semidirect products of groups*, Acta Sci. Math. (Szeged) **68** (2002), no. 1-2, 63–81.

[HM88] D. Hobby and R. McKenzie, *The structure of finite algebras*, Contemporary mathematics, vol. 76, American Mathematical Society, 1988.

[Kaa83] K. Kaarli, *Compatible function extension property*, Algebra Universalis **17** (1983), 200–207.

[KP01] K. Kaarli and A. F. Pixley, *Polynomial completeness in algebraic systems*, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, Florida, 2001.

[LN73] H. Lausch and W. Nöbauer, *Algebra of polynomials*, North-Holland, Amsterdam, London; American Elsevier Publishing Company, New York, 1973.

[LN79] H. Lausch and W. Nöbauer, *Local polynomial functions on factor rings of the integers*, Journal of the Australian Mathematical Society (Series A) **27** (1979), 232–238.

[Pil83] G. F. Pilz, *Near-rings*, 2nd ed., North-Holland Publishing Company – Amsterdam, New York, Oxford, 1983.