PROJEKTION VON VEKTOREN, NORMALVEKTOREN

Zunächst 2 Sätze zu Normalvektoren von Geraden und Ebenen.

Satz 1: Sei $ax+by+cz=d$ die Gleichung einer Ebene e in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalvektor auf die Ebene.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ auf alle Vektoren in der Ebene e senkrecht steht. Sei A und B ein beliebiger Punkt in der Ebene e. Dann ist $\vec{AB}$ ein beliebiger Vektor in der Ebene e. Sei $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$. Daraus folgt $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$. Wir bilden nun das Skalarprodukt $< \vec{AB}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} >$ und erhalten $a(x_a - x_b) + b(y_a - y_b) + c(z_a - z_b) = ax_a + by_a + cz_a - (ax_b + by_b + cz_b) = d - d = 0$. Damit steht der Vektor $\vec{AB}$ senkrecht auf $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Völlig analog zeigt man den folgenden Satz:

Satz 2: Sei $ax+by=d$ die Gleichung einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein Normalvektor auf die Gerade.

Gleichungsdarstellungen von Ebenen und Geraden bieten also den Vorteil, dass man sofort Normalvektoren ablesen kann.

Satz 3: Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren (nicht Null) in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Dann gilt: Der Projektionsvektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ ist gegeben durch den Vektor $\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{||\vec{b}||^2}\vec{b}$.

Beweis: Wir betrachten die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel ϕ ein. Da wir auf den Vektor $\vec{b}$ projizieren muss der entstehende Projektionsvektor die Richtung von $\vec{b}$ oder die entgegengesetzte Richtung zu $\vec{b}$ haben, dies im Fall, dass $\phi > 90°$. Es gilt also $\vec{a}_{\vec{b}} = x \cdot \frac{1}{||\vec{b}||} \cdot \vec{b}$, wobei x geeignet zu bestimmen ist. Es gilt aber nun $\frac{x}{||\vec{a}||} = cos\ \phi = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$, also $x = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{||\vec{b}||}$. Einsetzen für x ergibt: $\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{||\vec{b}||^2} \cdot \vec{b}$.

Bemerkung: Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Winkel ϕ einschließen der kleiner oder gleich $90°$ ist sieht man etwa aus einer Skizze sofort, dass $\frac{x}{||\vec{a}||} = cos\ \phi$ (x ist dann positiv). Ist ϕ größer als $90°$, so muss gelten $\vec{a}_{\vec{b}} = -\lambda \cdot \frac{1}{||\vec{b}||} \cdot \vec{b}$, wobei $\frac{\lambda}{||\vec{a}||} = cos(180 - \phi) =$

$-cos\ \phi$. Also folgt ebenso $\vec{a}_{\vec{b}} = -(-||\vec{a}||cos\ \phi) \cdot \frac{1}{||\vec{b}||} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||cos\ \phi \cdot \frac{1}{||\vec{b}||} \cdot \vec{b} = \frac{<\vec{a},\vec{b}>}{||\vec{b}||^2} \cdot \vec{b}$.

Mit Hilfe von Projektionsvektoren kann man sehr einfach den kürzesten Abstand, also den Normalabstand, zwischen eines Punktes und einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ bzw. zwischen eines Punktes und einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ berechnen.

Satz 4: Der Normalabstand s eines Punktes $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ zu einer Ebene $e : ax + by + cz = d$ im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $s = \frac{|p_1a+p_2b+p_3c-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ ein (beliebiger !) Punkt der Ebene. Wir denken uns den Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Ebene in diesen Punkt gesetzt und bilden den Verbindungsvektor $\vec{AP}$ zum Punkt P. $\vec{AP} = \begin{pmatrix} p_1 - x_a \\ p_2 - y_a \\ p_3 - z_a \end{pmatrix}$. Nun projizieren wir den Vektor $\vec{AP}$ auf den Normalvektor der Ebene. Die Länge s dieses Projektionsvektors ist dann der Normalabstand des Punktes zur Ebene. Somit gilt $s = ||\frac{<\vec{AP},\vec{n}>}{||\vec{n}||^2} \cdot \vec{n}||$.
$< \vec{AP},\vec{n} >= (p_1 - x_a)a + (p_2 - y_a)b + (p_3 - z_a)c = p_1a + p_2b + p_3c - d$. $s = \frac{|p_1a+p_2b+p_3c-d|}{||\vec{n}||^2} \cdot ||\vec{n}|| = \frac{|p_1a+p_2b+p_3c-d|}{||\vec{n}||} = \frac{|p_1a+p_2b+p_3c-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Völlig analog zeigt man:

Satz 5: Der Normalabstand s eines Punktes $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ zu einer Geraden $g : ax + by = d$ im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $s = \frac{|p_1a+p_2b-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.