

DETERMINANTEN VON MATRIZEN

Zum Abschluss der Vorlesung beschäftigen wir uns noch mit Determinanten von Matrizen. Dieses Kapitel wird auch im Vorlesungsskriptum behandelt, jedoch möchte ich es hier auf einige wesentliche Eckpunkte herunterbrechen. Wir behandeln Matrizen über einem Körper K . Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist $\det(A) \in K$. Die Determinante ist also eine Zahl in K . Jede Matrix hat eine Determinante. Wie berechnet man nun Determinanten und warum braucht man Determinanten überhaupt?

Satz bzw. Definition: Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist $A^{j,i}$ jene Matrix die man aus der Matrix A durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte erhält. Insbesondere ist $A^{j,i} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$

(1) Sei $A \in K^{1 \times 1}$, also $A = (a)$ mit $a \in K$. Dann ist $\det(A) = a$. (Gut, das ist nicht sehr interessant.)

(2) Sei $A \in K^{2 \times 2}$, etwa $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt $\det(A) = ad - cb$.

(3) Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$ (dafür gibts ein Merkschema - siehe Vorlesung).

(4) Der allgemeine Fall der Berechnung der Determinante einer $n \times n$ Matrix lässt sich immer auf die Berechnung von Determinanten vom Format

3 bzw. 2 zurückführen. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Dann

gilt $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{ji} \det(A^{j,i})$ (sogenannter Entwicklungssatz von Laplace, i ist ein beliebiger Spaltenindex der Matrix und über den Zeilenindex j wird summiert.)

Bevor wir Beispiele rechnen, warum braucht man Determinanten. Betrachten wir etwa ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt (ohne Beweis) Folgendes:

Satz:

- (1) Falls $\det(A) \neq 0$, so ist die Matrix A invertierbar.
- (2) (Cramersche Regel) Falls $\det(A) \neq 0$ ist das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar und es gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$: $x_i = \frac{D_{x_i}}{\det(A)}$ wobei D_{x_i} die Determinante jener Matrix ist, die man aus der Matrix A erhält indem man die i -te Spalte durch den Vektor b ersetzt.

Mit der Cramerschen Regel erspart man sich also das Gauss'sche Eliminationsverfahren falls das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, also $\det(A) \neq 0$ (ansonsten ist die Division durch $\det(A)$ nicht möglich).

Es gibt noch eine Vielzahl weiterer wichtiger Anwendungen von Determinanten, wir gehen nicht darauf ein.

Beispiele: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -6 + 12 + 0 - (-8 + 1 + 0) = 13$.

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 3 \cdot \det(A^{1,1})$ und $A^{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Aus-

rechnen ergibt $\det(A^{1,1}) = 27$, also folgt $\det(A) = 3 \cdot 27 = 81$.

Wir betrachten abschließend das Gleichungssystem $Ax = b$ der Form $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da $\det(A) = 13$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Wir möchten x_2 berechnen und müssen dafür D_{x_2} , die Determinante von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

berechnen. Wir erhalten $D_{x_2} = 4$. Also ist $x_2 = \frac{4}{13}$.