Vorlesung Algebra für Informatik, Sommersemester 2008
Vorlesungsklausur, 1. Juli 2008

Familienname: .... Vorname:...........................

Matrikelnr.: .... Studienkennzahl: ....

1. (Matrizen, 4 Punkte)

   (a) Seien A, B beide $n \times n$-Matrizen, und sei $C := B^T \cdot A$. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $C(i,j)$ in der Form

   $$C(i,j) = \sum_{k=?}^{?} A(?,?)B(?,?).$$

   (b) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} für

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. (Unterräume, 5 Punkte) Sei B die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 10 & -23 \\ -2 & -4 & 15 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & 9 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis für den Zeilenraum von B.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für den Nullraum von B.

(c) Bestimmen Sie den Rang von B.

3. (Abstandsberechnungen, 4 Punkte) Bestimmen Sie jene Punkte auf den Geraden g_1 und g_2, die voneinander geringsten Abstand haben. (Bestimmen Sie also $X_1 \in g_1$ und $X_2 \in g_2$, sodass der Abstand $d(X_1, X_2)$ minimal ist.) Dabei sind die Geraden g_1 und g_2 gegeben durch:

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g_2 : X = \begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. (Zahlentheorie, 3 Punkte)

   (a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(93, 105)$, und berechnen Sie Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$, sodass $\mathrm{ggT}(93, 105) = 93u + 105v$.

   (b) Bestimmen Sie eine Lösung der Kongruenz $17x \equiv 49 \pmod{97}$.

   (c) Geben Sie eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ an, sodass die Kongruenz

$$10 \cdot x \equiv 2 \pmod{m}$$

   keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzt.

5. (Endliche Körper, 4 Punkte).

(a) Sei $f \in \mathbb{Z}_7[x]$ gegeben durch $f = x^2 + 4x + 5$. Berechnen Sie

$$[1 + 2x]_f \cdot [5 + 2x]_f$$

und geben Sie das Ergebnis in der Form $[ax + b]_f$ an.

(b) Der Ring $\mathbf{K} := \mathbb{Z}_7[x]/f$ mit $f = x^2 + 4x + 5$ ist ein Körper. Wieviele Elemente hat $\mathbf{K}$? Was ist die Charakteristik von $\mathbf{K}$?

6. (Abbildungsmatrix, 4 Punkte). Gegegeben ist folgende lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$h(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x+z \\ 2x+y \end{pmatrix}.$$

Sei

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

und sei

$$C = (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $S_h(B, C)$.