

Algebra für Informatiker und Informatikerinnen

12. Übungsblatt für den 24. und 25. Juni 2010

Bemerkung: Sie dürfen diesmal sämtliche Nebenrechnungen mit Mathematica durchführen, müssen jedoch den Rechengang erklären können.

156. (a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \neq \{ \}$. Zeigen Sie: A^\perp ist ein Unterraum des \mathbb{R}^n .
(b) Sei V ein beliebiger Vektorraum und $A \subseteq V$. Zeigen Sie: $A^\perp = L(A)^\perp$.
157. Bestimmen Sie, ohne das Verfahren von Gram-Schmidt zu verwenden, eine ONB von $\varepsilon: 2x - y + 4z = 0$.
158. Orthonormalisieren Sie $B = ((4, 5, -3), (2, 1, 1), (3, 5, 1))$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit MATHEMATICA. (**Orthogonalize[]**).
159. Sei U ein Unterraum des \mathbb{R}^3 mit ONB $B = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- (a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Voraussetzung, dass B eine ONB ist, die Koordinaten von $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ bezüglich B .
- (b) Bestimmen Sie die Länge der Vektoren u , $(u)_B$, v und $(v)_B$.
- (c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen u und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie zwischen $(u)_B$ und $(w)_B$.
- (d) Interpretieren Sie die Resultate aus (b) und (c).
160. Darstellung einer Pyramide als 2D-Grafik. Gehen Sie wie folgt vor:
Lösen Sie Übung 5.20 (1) und (2) aus dem Skript, S.93.
161. (Fortsetzung von Übung 160): Lösen Sie Übung 5.20 (3) und (4) aus dem Skript, S.93.
Zusatzfrage: Was hat das jetzt mit einer 2D-Pyramide zu tun?
- 162.(a) Gegeben sei der Punkt $P = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}$ und die Ebene $\varepsilon: X = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie $R \in \varepsilon$ mit kürzestem Abstand zu P .
- (b) Bestimmen Sie die Projektion von P auf ε^\perp .
- (c) Überprüfen Sie Satz 5.16 für obiges Beispiel, d.h. stellen Sie P als Summe von Elementen aus ε und ε^\perp dar.

163. Gegeben sei das Datenmaterial $\{(x,y,z)\} = \{\{1, 1, 12\}, \{1, 2, 14\}, \{2, 1, 13\}, \{2, 2, 15\}, \{3, 2, 16\}, \{3, 3, 20\}, \{4, 4, 19\}\}$. Bestimmen Sie die bestapproximierende Ebene durch diese Punktwolke. (Bemerkung: Datenformat schon für Mathematica „aufbereitet“.)

164. Bezüglich der kanonischen Basen B und C von \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 sei $S_h(B, C) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung. Welche Matrix entspricht h bezüglich der Basen $B' = ((2, 1, -1), (1, 0, 3), (-1, 2, 1))$ und $C' = ((1, 1), (1, -1))$?

165. Eine lineare Abbildung $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei wie folgt gegeben durch die Bilder einer Basis wie folgt:

$$h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad h \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Bilder von $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

166. Gegeben seien die Basen $B = ((2,0), (1, -1))$ und $C = ((0,1), (2,1))$ des \mathbb{R}^2 . Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix $S_{id}(B, C)$

167. Sei h die Abbildung, die einen Punkt des \mathbb{R}^3 an der Ebene $\varepsilon: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ spiegelt. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von h bzgl. der kanonischen Basis.

168. (**freiwillige Bonusaufgabe 1**): Sei h die Abbildung, die einen Punkt des \mathbb{R}^3 im Winkel von 180° um die Gerade $g: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dreht. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von h bzgl. der kanonischen Basis.

169. (**freiwillige Bonusaufgabe 2**): Seien $B = ((1,1,1), (1,0,1), (-1,1,1))$ bzw. $C = ((1,0), (0,1))$ Basen des \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 und sei $h(x, y, z) = (x + 3y - z, 2y + 3z)$. Bestimmen Sie $S_h(B, C)$.

170. (**freiwillige Bonusaufgabe 3**):

(a) Zeigen Sie Satz 9.9, S.133.

(b) Ergänzen Sie die fehlenden Details im Beweis zu Satz 9.10, S.133.