

11. Übungsblatt
Algebra für Informatiker/innen
17. und 18. Juni 2010

141. Der Vektor v hat bezüglich der Basis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich

(a) der Basis $C = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$,

(b) der kanonischen Basis des \mathbb{R}^3 .

142. Sei $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von E .

(a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

(b) Wie lauteten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B ?

(c) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat.

143. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme und stellen Sie die Lösungsmengen als lineare Mannigfaltigkeiten dar. Was ist der zugehörige Unterraum?

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \begin{array}{rcl} 2w & +4x & -2z = 0 \\ w & +2x & +3y + z = 0 \\ -w & -2x & +6y + 5z = 0 \end{array} & \text{(b)} \quad \begin{array}{rcl} 2w & +4x & -2z = 10 \\ w & +2x & +3y + z = 6 \\ -w & -2x & +6y + 5z = 3 \end{array} \end{array}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{rcl} 2w & +4x & -2z = 2 \\ w & +2x & +3y + z = 1 \\ -w & -2x & +6y + 5z = -1 \end{array}$$

144. Seien $U = L((1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 3))$ und $W = L((1, 2, 3, -1), (1, 0, -1, 1))$ Unterräume von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

145. Seien U, W wie im vorigen Beispiel. Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$.

146. Seien U und W endlich dimensionale Vektorräume. Dann gilt

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W). \quad (1)$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W),$$

genau dann wenn die Summe $U + W$ direkt ist.

147. Bestätigen Sie Gleichung (1) für U und W aus Beispiel 144/145.

148. Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über \mathbb{R} und seien die Unterräume U_1, U_2 gegeben durch

$$U_1 = L(x^3 + 2x^2, 2x^3 + 3x^2 + 1), \quad U_2 = L(x^3 + 2x^2 + 1, x^3 - 1, x^2 + 1).$$

Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $U_1, U_2, U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$.

149. Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V . Leiten Sie eine Formel für $\dim(U_1 + U_2 + U_3)$ her.

150. Seien U_1, \dots, U_k Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V . Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 + \dots + U_k) \leq \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k).$$

151. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} und W_1, W_2 seien Unterräume von V . Zeigen oder widerlegen Sie:

Ist $V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2$, so folgt $W_1 = W_2$.

152. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $U_i, i \in I$ Unterräume von V . Zeigen oder widerlegen Sie: Die Summe $\sum_{i \in I} U_i$ ist genau dann direkt, falls $U_i \cap U_j = \{0\}$ für alle $i \neq j, i, j \in I$.

153. MATHEMATICA Schreiben Sie ein Mathematica-Programm, das für zwei gegebene Basen $B = (b_1, \dots, b_m), C = (c_1, \dots, c_k)$ und einen Vektor v mit Koordinaten $(v)_B$ die Darstellung des Vektors in Basis C (wenn möglich) berechnet.

Eingabe: $\{b_1, \dots, b_m\}, \{c_1, \dots, c_k\}, \{v_{b,1}, \dots, v_{b,m}\}$

Ausgabe: $\{v_{c,1}, \dots, v_{c,k}\}$.

154. MATHEMATICA Schreiben Sie ein Mathematica-Programm, das für gegebene Unterräume $U = L(u_1, \dots, u_m), W = L(w_1, \dots, w_k)$ des \mathbb{R}^n eine Basis von $U \cap W$ berechnet.

Eingabe: $\{u_1, \dots, u_m\}, \{w_1, \dots, w_k\}$

Ausgabe: Basis von $U \cap W$.

155. MATHEMATICA Schreiben Sie ein Mathematica-Programm, das für gegebene Unterräume $U = L(u_1, \dots, u_m), W = L(w_1, \dots, w_k)$ des \mathbb{R}^n eine Basis von $U + W$ berechnet.

Eingabe: $\{u_1, \dots, u_m\}, \{w_1, \dots, w_k\}$

Ausgabe: Basis von $U + W$.