10. Übungsblatt
Algebra für Informatiker/innen
10. und 11. Juni 2010

126. Berechnen Sie falls möglich:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t$

(b) $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $-5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -3 & 4 \end{pmatrix}$

127. Berechnen Sie falls möglich:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t$

128. Zeigen Sie: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, seien A, B zwei $m \times n$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt:

$$(A + B)^t = A^t + B^t \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot A^t = (\lambda \cdot A)^t.$$

129. Zeigen Sie Satz 6.3.c: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^n_m, B \in \mathbb{K}^k_n, C \in \mathbb{K}^l_k$. Dann gilt:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

130. Zeigen Sie Satz 6.3.f: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei A eine $m \times n$ Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Seien E_m bzw. E_n die $m \times m$ bzw. $n \times n$ Einheitsmatrizen. Dann gilt:

$$A \cdot E_n = E_m \cdot A = A.$$

131. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gilt.

132. Sei A eine $m \times m$ Matrix, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt, und sei E die $m \times m$ Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist.
Hinweis: Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

133. Berechnen Sie A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3.$$

134. Widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:
Wenn das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eine Lösung hat, so besitzt für jede rechte Seite b das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ zumindest eine Lösung.

135. Finden Sie eine Matrix B, sodass B in Zeilenstaffelnormalform und $Z(A) = Z(B)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & -3 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

136. Bestimmen Sie mittels Satz 4.37. eine Basis von $N(B)$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

137. Bestimmen Sie mittels Satz 4.37. eine Basis von

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

138. Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension hat der Nullraum $N(A)$?

139. Gilt $L((3,1,-1),(2,0,5)) = L((5,1,4),(1,1,-6))$?

140. Gilt $L((1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)) = L((1,2,-1),(3,1,1),(4,3,0))$?