Algebra für Informatiker und Informatikerinnen
9. Übungsblatt für den 27. und 28. Mai 2010

112. (a) Sind $(1,1,-2)$, $(1,2,-3)$ und $(1,\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$?

     (b) Sind $(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(2,2,2)$ und $(0,0,1)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{Q}$?

113. Welche der folgenden Teilmengen sind linear unabhängig? ($K=\mathbb{Z}_3$, $V=(\mathbb{Z}_3)^3$). Berechnen Sie auch die linearen Hüllen.

     (a) $S_1=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

     (b) $S_2=\{(0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\}$

114. Bestimmen Sie alle maximalen linear unabhängigen Teilmengen für folgende Teilmengen des ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$:

     (a) $S_1=\{(0,1,1),(1,2,3)\}$

     (b) $S_2=\{(0,0,0)\}$

     (c) $S_3=\{(0,1,1),(1,1,0),(2,3,1),(1,-1,-2)\}$

115. Sei $B^A:=\{f \mid f:A\to B\}$. Welche der folgenden Teilmengen des ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind linear unabhängig?

     (a) $S_1=\{1,x\}$

     (b) $S_2=\{1,x,2x\}$

     (c) $S_3=\{1,\ln(x),\ln(2x)\}$

116. Sei $V:=(\{A\subset\mathbb{N}\mid A \text{ endlich}\},\Delta)$ ein Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ mit der äußeren Multiplikation aus dem Skriptum (Beispiel f) nach Definition 5.1). Bestimmen Sie in V die lineare Hülle für $S:=\{\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\}\}$.

117. Bestimmen Sie alle Basen des $(\mathbb{Z}_3)^2$.

118. Für welche $a\in\mathbb{R}$ bildet $\{(a,0,1),(a,a,0),(0,a,1)\}$ eine Basis des ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$?

119. Sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum und seien $v,w\in V$. Zeigen Sie: $\{v,w\}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn $\{v+w,v-w\}$ eine Basis von V ist.

120. Erweitern Sie, falls möglich, $S=((1,0,0,1,1),(1,1,1,0,1),(1,1,0,0,0))$ zu einer Basis des Vektorraums ${}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2)^5$.

121. Verwenden Sie den Satz von Steinitz, um aus $S = ((1,1,3),(1,1,1),(2,2,4),(0,0,2))$ eine Basis des Vektorraums ${}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})^3$ zu machen.

ACHTUNG: Für alle Mathematica-Übungsbeispiele auf diesem und den folgenden Übungsblättern gilt:

- Verwenden Sie keine noch nicht gelernte Theorie.
- Verwenden Sie keine eingebauten Funktionen, welche das Gesamtproblem in einem Schritt lösen.
- Sie dürfen jedoch "Teilergebnisse" (wie etwa bei Übungsbeispiel 125 das Lösen von Gleichungssystemen) zur Gänze von Mathematica erledigen lassen.
- Um das Beispiel anzukreuzen, bringen Sie entweder eine Notebook mit dem lauffähigen Programm mit oder schreiben/drucken Sie Ihr Beispiel auf Overheadfolie.

122. (M) Schreiben Sie eine Mathematica-Funktion, die bei Eingabe zweier natürlicher Zahlen die Summe dieser Zahlen ausgibt.
Also: Eingabe: A, B, Ausgabe: $A + B$.

123. (M) Schreiben Sie eine Mathematica-Funktion, die bei Eingabe einer Liste von Vektoren und einer gleichlangen Liste von Zahlen die zugehörige Linearkombination ausgibt.
Also: Eingabe: $\{v_1, \dots, v_n\}$,$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, Ausgabe: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

124. (M) Schreiben Sie eine Mathematica-Funktion, die für drei gegebene Vektoren des $\mathbb{R}^3$ überprüft, ob diese eine Basis des ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ bilden.

125. (M) Schreiben Sie eine Mathematica-Funktion, die bei Eingabe einer Liste von Vektoren alle linear unabhängigen Teilmengen von Vektoren ausgibt.
Also: Eingabe: $\{v_1, \dots, v_n\}$, Ausgabe: $\{\{v_{i_1}, \dots v_{i_1}\}, \dots, \{v_{i_k}, \dots v_{i_m}\}\}$.
(Überprüfen Sie Ihr Programm etwa mit den Mengen aus Beispiel 114.)