

**Algebra für Informatiker und Informatikerinnen**  
**8. Übungsblatt für den 20. und 21. Mai 2010**

98. Zeigen Sie: Im  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  sind alle nicht-trivialen Unterräume gegeben durch Geraden bzw. Ebenen durch den Ursprung.

99. Bildet  $V = (\{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}, +)$  einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

100. Bildet der  $\mathbb{R}^2$  mit  $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$  einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

101. Bildet der  $\mathbb{R}^2$  mit  $\lambda(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, x_2) & \text{für } \lambda = 1 \\ (\lambda x_1, 0) & \text{sonst} \end{cases}$  einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

102. Bildet der  $\mathbb{R}^2$  mit  $\lambda(x_1, x_2) = \begin{cases} (\lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}) & \text{für } \lambda \neq 0 \\ (0, 0) & \text{sonst} \end{cases}$  einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

103. Bildet der  $\mathbb{R}^2$  mit  $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2 + (1 - \lambda)x_1)$  einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

104.(a) Ist  $U = {}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, +)$  ein Unterraum des  ${}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, +)$ ?

(b) Ist  $W = {}_{\mathbb{R}}(\{(x, 4x) | x \in \mathbb{R}\}, +)$  ein Unterraum des  ${}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, +)$ ?

Bemerkung: Lösen Sie die Aufgabe, ohne Bsp. 98 zu verwenden!

105. Ergänzen Sie den Beweis von Satz 5.3 aus dem Skript:

TEIL I: Zeigen Sie die Abgeschlossenheit bzgl. der Multiplikation sowie Axiom 5.1.a

106. (Fortsetzung von Bsp. 105) Ergänzen Sie den Beweis von Satz 5.3 aus dem Skript:

TEIL II: Axiom 5.1.b und 5.1.c

107. Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $U = \{(x, y, z) \in V | 2x - y + z = 0\} \leq V$ .

(a) Bestimmen Sie ohne Verwendung der Symbole  $\sim$  oder  $[\ ]$  die Äquivalenzklassen von  $(0, 0, 0)$  und von  $(1, 0, -1)$  bzgl.  $\sim_U$  rechnerisch (nicht geometrisch!)

(b) Stellen Sie die Resultate als lineare Mannigfaltigkeit dar.

108. (Fortsetzung von Bsp. 107): Bestimmen Sie rechnerisch (ohne geometrisch zu argumentieren) den Faktorraum  $V/\sim_U$ . Beweisen Sie eventuelle Vermutungen! Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

109. (Fortsetzung von Bsp. 107 und 108): Bestimmen Sie ein Repräsentantensystem.

110. (Fortsetzung von Bsp. 107- 109): Illustrieren Sie anhand von anschaulichen nichttrivialen Beispielen die Verträglichkeit der Operation  $\oplus$  im Faktorraum, die Addition des neutralen Elements im Faktorraum sowie die des Inversen und die Multiplikation einer Äquivalenzklasse mit einem Skalar im Faktorraum.

111. Lösen Sie das untenstehende lineare Gleichungssystem und stellen Sie die Lösungsmenge als lineare Mannigfaltigkeit im Sinne von Satz 5.5. dar und bestimmen Sie weiters den dem zugehörigen **homogenen** Gleichungssystem zugeordneten Unterraum.

$$\begin{array}{rcccc} x & +2x & +3z & = & 2 \\ & y & -z & = & 1 \\ x & +3y & +2z & = & 3 \end{array}$$