Algebra für Informatiker und Informatikerinnen
7. Übungsblatt für den 6. und 7. Mai 2010

84. Sei M eine beliebige Menge. Bildet $T = (P(M), \Delta, \cap)$ einen Ring? Einen Körper? Überprüfen Sie gegebenenfalls die Attribute „nullteilerfrei", „kommutativer Ring", „Ring mit Einselement", „Integritätsbereich".

85. Wie (84) für $T = (\mathbb{G}, +, \cdot)$ bzw. $S = (\mathbb{U}, +, \cdot)$

86. Finden Sie ein Beispiel für Verknüpfungen $\otimes$ und $\oplus$, die nicht distributiv sind.

87. Zeigen Sie: In einem nullteilerfreien Ring R gilt die Kürzungsregel, d.h.:
Für alle $x, y, z \in R$ mit $x \neq 0$ gilt: $(x \cdot y = x \cdot z) \Rightarrow \; y = z$

88. Zeigen Sie: Jeder endliche Integritätsbereich mit mindestens zwei Elementen ist ein Körper.

89. Berechnen Sie $(5 + 3x - 11x^2 + 20x^3 - 8x^4 + 3x^5) : (x^2 - 2x + 5)$ über $\mathbb{R}$.

90. Berechnen Sie $(x + x^2 + x^4 + x^7) : (x^3 + x^2 + x + 1)$ über $\mathbb{Z}_2$.

91. Faktorisieren Sie $-3 - 5x - 4x^2 - 4x^3 - x^4 + x^5$ über $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie alle Nullstellen mit Vielfachheit.

92. (a) Finden Sie ein Polynom vom Grad 6 über $\mathbb{Z}_2$, in dem 0 keine Nullstelle und 1 eine Nullstelle der Vielfachheit 3 ist oder zeigen Sie, dass das nicht möglich ist.
(b) Finden Sie ein reduzibles Polynom vom Grad 7 über $\mathbb{Z}_2$, das keine Nullstelle hat oder zeigen Sie, dass das nicht möglich ist.

93. Finden Sie ein Polynom p vom Grad 3 und ein Polynom q vom Grad $\neq 3$ (jeweils über $\mathbb{Z}_3$), mit $p \neq q$, wobei die induzierten (entsprechenden) Polynomfunktionen aber identisch sind.

94. Führen Sie eine Partialbruchzerlegung für $\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+1)}$ durch.

95. Führen Sie eine Partialbruchzerlegung für $\frac{2x-1}{2-3x+x^3}$ durch.
<u>Hinweis:</u> Für jede Nullstelle a_i mit Vielfachheit k im Nenner verwenden Sie den Ansatz
$$\frac{A_1}{x-a_i} + \frac{A_2}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a_i)^k}$$

96. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{GF}(8)$ und führen Sie (exemplarisch) das Addieren und Multiplizieren in $\mathrm{GF}(8)$ vor.

97. Finden Sie das erzeugende Element von $(\mathrm{GF}(4)^*, \cdot)$ und zeigen Sie, wie man damit „gut" rechnen kann.