

6. Übungsblatt
Algebra für Informatiker/innen
29. und 30. April 2010

69. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.
70. (a) Ist $\{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der ungeraden ganzen Zahlen eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$?
(b) Ist $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der geraden ganzen Zahlen eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$?
(c) Ist $\{2k : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$?
71. Bestimmen Sie das Zentrum von (G, \circ) aus Bsp. 67.
72. Bestimmen Sie alle zyklischen Untergruppen von (G, \circ) aus Bsp.67.
73. Berechnen Sie $7^{9876543210}$ in \mathbb{Z}_{13} möglichst effizient (ohne die Angabe in einen Computer einzugeben).
74. Wir betrachten die Gruppe $(S(3), \circ)$.
- (a) Ist $H = \{\epsilon, \delta\}$ ein Normalteiler? Bestimmen Sie $|S(3) : H|$.
(b) Ist $H = \{\epsilon, \gamma, \gamma^2\}$ ein Normalteiler? Bestimmen Sie $|S(3) : H|$.
(ϵ, δ, γ sind dabei wie im Buch definiert.)
75. Sind die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $((0, \infty), \cdot)$ isomorph? Geben Sie wenn möglich einen Gruppenisomorphismus an.
76. Sind die Gruppen $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \Delta)$ und $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorph? Geben Sie wenn möglich einen Gruppenisomorphismus an.
77. Gegeben seien n lineare Gleichungen in m Variablen. Die Lösungsmenge habe k frei wählbare Parameter. Wie kann sich die Lösungsmenge ändern, wenn man eine Gleichung weglässt/hinzufügt?
78. Wenn bei 4 linearen Gleichungen in 5 Variablen zwei der Variablen frei wählbar sind, ist es dann egal, welche zwei man wählt? Wann ja, wann nein?
79. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem per Hand, indem Sie das System auf Diagonalforn mit lauter Einsern in der Diagonale bringen. Stellen Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form dar.

$$\begin{array}{cccccc} 3a & +3b & & +d & = & 4 \\ a & +2b & -c & +2d & = & 7 \\ -2a & +b & +2c & +d & = & 1 \\ 3a & & +c & -d & = & -1 \end{array}$$

80. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem per Hand, indem Sie das System auf Diagonalform mit lauter Einsern in der Diagonale bringen. Stellen Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form dar.

$$\begin{array}{rccccrcr} a & +b & -c & -2d & +3e & = & 2 \\ & -b & +c & +2d & -e & = & 0 \\ 2a & -3b & +3c & +6d & +2e & = & 3 \\ -3a & +2b & -2c & -4d & -5e & = & -5 \\ a & & & & +2e & = & 2 \end{array}$$

81. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem per Hand, indem Sie das System auf Diagonalform mit lauter Einsern in der Diagonale bringen. Stellen Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form dar.

$$\begin{array}{rccccrcr} 3a & -b & +2c & -d & = & 0 \\ a & +b & +c & +d & = & 9 \\ 2a & & +5c & +d & = & 3 \\ & 2b & +4c & +3d & = & 5 \end{array}$$

82. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem per Hand, indem Sie das System auf Diagonalform mit lauter Einsern in der Diagonale bringen. Stellen Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form dar.

$$\begin{array}{rccccrcr} -2a & & +c & +d & = & 0 \\ a & +b & -c & & = & 0 \\ & 2b & -c & +d & = & 0 \\ a & +5b & -3c & +2d & = & 0 \end{array}$$

83. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit einem Computeralgebraprogramm ihrer Wahl (z.B. MATHEMATICA). Stellen Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$