

## 5. Übungsblatt Algebra für Informatiker/innen

22. und 23. April 2010

61. Handelt es sich bei der durch folgende Verknüpfungstafel gegebene Struktur um eine Halbgruppe/Monoid/Gruppe?

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$c$	$d$	$b$	$a$
$b$	$d$	$a$	$a$	$b$
$c$	$b$	$c$	$d$	$c$
$d$	$a$	$b$	$c$	$d$

62. Bestimmen Sie die Verknüpfungstabelle von  $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \cap)$ . Handelt es sich um eine Halbgruppe/Monoid/Gruppe?

63. Zeigen Sie, dass es in einer Gruppe  $(G, \circ)$  für jedes  $g \in G$  nur ein einziges inverses Element  $g^{-1}$  geben kann.

64. Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Zeigen Sie:

- (a)  $\forall x \in G : (x^{-1})^{-1} = x$ .  
 (b)  $\forall x, y \in G : (x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ .

65. Sei  $C[0, 1]$  die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[0, 1]$ . Zeigen Sie:  $(C[0, 1], +)$  ist eine Gruppe. Was ist das neutrale Element dieser Gruppe? Was ist das inverse Element zu  $f \in C[0, 1]$ ? Ist die Gruppe abelsch, ist sie zyklisch?

66. Bestimmen Sie:

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ,  
 (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ .

67. Sei  $Q$  ein Quadrat in  $\mathbb{R}^2$  mit Ecken  $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ . Sei  $G$  die Menge aller bijektiven, linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ , die das Quadrat auf sich selbst abbilden. Zeigen Sie:

- (a)  $G = \{id, a, a^2, a^3, b, a \circ b, a^2 \circ b, a^3 \circ b\}$ , wobei  $a$  die Drehung um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn und  $b$  die Spiegelung an der  $x$ -Achse.  
 (b)  $a^4 = id, b^2 = id, b \circ a = a^3 \circ b$ .

68. Bestimmen Sie die Gruppentafel zu  $(G, \circ)$  aus Bsp. 67. Ist  $(G, \circ)$  eine abelsche Gruppe?