

Algebra für Informatiker und Informatikerinnen

4. Übungsblatt für den 15. und 16. April 2010

46. Jemand bewegt sich 10 km nach Nordosten, von dort aus 8 km nach Osten und von dort aus 4 km nach Süden. Wie weit ist er dann vom Ausgangspunkt entfernt? Rechnen Sie mit Vektoren, verwenden Sie keine Winkelfunktionen.
47. Im Punkt $(0,1,2)$ ist ein Seil befestigt, an dem eine 3 t schwere Last befestigt. Welche Spannkraft wirkt in diesem Seil? Bestimmen Sie den Kraftvektor und den Absolutbetrag der Kraft.

Zur Erinnerung: Gewichtskraft $F = mg$, rechnen Sie bei diesem und allen folgenden Beispielen, bei denen die Erdbeschleunigung benötigt wird, mit $g = 10\text{m/s}^2$.

48. Eine Lampe mit Masse $m = 4\text{ kg}$ wird von zwei Seilen in der Mitte zweier $d = 50\text{ m}$ voneinander entfernter gleich hoher Masten gehalten. Die Lampe hängt 5 m durch.
- (a) Wie groß sind die (Beträge der) Spannkraften in den Drähten?
- (b) Wie sieht das Resultat für $d = 5\text{ m}$ aus? Wie für $d = 5\text{ cm}$?

*Hinweis zur Lösung: Bestimmen Sie zuerst die **Richtungen** der vorkommenden Kräfte. Das System ist „stabil“, die Summe aller vorkommenden Kraftvektoren (hier: Seilspannung 1 + Seilspannung 2 + Lampengewicht) muss also gleich dem Nullvektor sein. Ordnen Sie hierzu also jeder Richtung die entsprechende **Länge** zu. „Nebenrechnungen“ wie das Lösen von Gleichungssystemen o.ä. dürfen Sie bei diesem und den folgenden Aufgaben auf diesem Blatt mit einem Computer lösen.*

49. Gegeben seien die Vektoren $a = (3, -2, 4)$ und $b = (1, 2, -3)$.
- (a) Bestimmen Sie die orthogonalen Projektionen a_b und b_a .
- (b) Sei $c = a \times b$. Verifizieren Sie durch Nachrechnen $a \cdot c = b \cdot c = 0$.
50. (a) Bestimmen Sie den Anteil der Seilspannkraften (als Vektoren) aus Bsp. 48a in Richtung Erdmittelpunkt sowie parallel zum Boden unter Verwendung der orthogonalen Projektion von Vektoren.
- (b) Diese beiden Vektoren bilden die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks. Bestimmen Sie die Länge der Hypotenuse und vergleichen Sie mit Bsp. 48a.
51. Eine Straßenlampe mit Masse m hängt im Punkt $(0,0,6)$ und wird von 3 Seilen gehalten, die in den Punkten $S_1 = (-2,2,7)$, $S_2 = (2,1,7)$ und $S_3 = (-1,-3,7)$ befestigt sind.
- (a) Berechnen Sie die Kräfte in den Seilen (in Abhängigkeit von m).
- (b) Wie groß darf die Masse der Straßenlampe maximal sein, damit jedes der 3 Seile mit jeweils nicht mehr als 100N belastet wird?

52. Eine punktförmige Masse (Gewichtskraft 10N) wird durch zwei Seile, die in den Punkten $S_1 = (1,0,2)$ und $S_2 = (0,1,2)$ befestigt sind, gehalten, und liegt gleichzeitig im Punkt $(2,2,0)$ auf einer schiefen Ebene $\epsilon: x + y + 2z = 4$. Berechnen Sie die Spannkraften in den beiden Seilen.
53. (a) Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen $\epsilon_1: 3x - y + 2z = -4$ und $\epsilon_2: x + y = 2$.
 (b) Die beiden Ebenen $\epsilon_1: y - z = 0$ und $\epsilon_2: x + y + z = 0$ bilden eine Rinne, in die eine Kugel gelegt wird. In welche Richtung rollt die Kugel?
54. Im Punkt $(0,0,0)$ wird an einer reflektierenden Ebene $\epsilon: x - y + z = 0$ ein vom Punkt $P = (-1,2,0)$ ausgehender Lichtstrahl gespiegelt. Bestimmen Sie die Richtung des reflektierten Strahls.
55. (Fortsetzung von Beispiel 54). Im Punkt P befindet sich ein weiterer Spiegel, der so justiert ist, dass der im Ursprung reflektierte Strahl im rechten Winkel auf diesen zweiten Spiegel einfällt.
 (a) In welcher Ebene liegt dieser zweite Spiegel?
 (b) In welchem Punkt trifft der im Ursprung reflektierte Lichtstrahl auf den zweiten Spiegel?
Hinweis zur Lösung: Skizze!!!
56. Auf eine Dachfläche mit Normalvektor $n = (3,0,4)$ wirkt die Kraft $F = (-30,20, -10)$ N.
 (a) Welche Kraft wirkt senkrecht zur Dachfläche?
 (b) Welche Kraft wirkt in der Falllinie $v = (4,0, -3)$?
 (c) [Freiwillige Zusatzfrage]: Welche Kraft wirkt sonst noch? (Bemerkung: Diese Frage kann man auf zumindest drei Arten (!) lösen.)
57. (Fortsetzung des in der Vorlesung gerechneten Übungsbeispiels 3.11 aus dem Buch):
 (a) In welche Richtung rollt die Kugel?
 (b) Bestimmen Sie die Beschleunigung der Kugel.
58. (a) Bestimmen Sie alle Vektoren, die senkrecht auf die yz -Ebene stehen und Länge 2 haben.
 (b) Bestimmen Sie alle Vektoren, die in der yz -Ebene liegen und mit der positiven z -Achse einen Winkel von 60° einschließen.
59. Finden Sie alle Vektoren der Länge $\sqrt{2}$, die senkrecht auf $(1,0, -2)$ stehen und mit $(1,0,1)$ einen Winkel von 60° einschließen.
60. Bei der Schokoladenproduktion wird flüssige Schokolade mit einer Geschwindigkeit von $v=12\text{mm/s}$ in Richtung $(2,1,2)$ durch eine dreieckige Form mit den Eckpunkten $A = (3,0,1)$, $B = (0,2,0)$ und $C = (3,4,3)$ gedrückt. Welches Schokoladenvolumen wird in 10s produziert?