

## 2. Übungsblatt Algebra für Informatiker/innen

18. und 19. März 2010

16. In einer Urne befinden sich 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. Sie ziehen 3 mal eine Kugel, wobei Sie diese nach jedem Zug wieder in die Urne zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie
- (a) 3 schwarze Kugeln,
  - (b) 2 schwarze und 1 weiße Kugel,
  - (c) 1 schwarze und 2 weiße Kugeln,
  - (d) 3 weiße Kugeln ziehen?
17. Gegeben sei ein gewöhnliches Fahrradschloss mit 3 Ringen und je 10 Ziffern. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für den Code? Wieviele Möglichkeiten gibt es bei einem verbesserten Fahrradschloss mit 4 Ringen und je 16 Ziffern?
18. Sie heben von einem Stapel Schnapskarten (=20 verschiedene Karten) 5 Karten ab. Wieviele Möglichkeiten gibt es für ihre Kartenhand, wenn die Reihenfolge der Karten beachtet wird? Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird?
19. Sie ziehen aus einer Urne mit 1 roten, 1 blauen, 1 gelben, 1 lila Kugel zweimal, wobei Sie die Kugel nach jedem Zug wieder in die Urne zurücklegen. Wieviele verschiedene Farbkombinationen gibt es? Listen Sie die Farbkombinationen auf und vergleichen Sie mit der berechneten Anzahl.
20. Bestimmen Sie jeweils, welche der Eigenschaften *Reflexivität*, *Transitivität*, *Symmetrie*, *Antisymmetrie*, *Funktionalität* jede der folgenden Relationen erfüllt.
- (a)  $A = B = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ ,
  - (b)  $A = B = \{\star, \circ, \square, \triangle\}$ ,  $R = \{(\star, \circ), (\square, \circ), (\triangle, \circ), (\circ, \triangle), (\circ, \square)\}$ .
21. Bestimmen Sie jeweils, welche der Eigenschaften *Reflexivität*, *Transitivität*, *Symmetrie*, *Antisymmetrie*, *Funktionalität* jede der folgenden Relationen erfüllt.
- (a)  $A = B = \mathbb{Z}$ ,  $(a, b) \in R \Leftrightarrow a^2 = b$ ,
  - (b)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{\}$ .
22. Bestimmen Sie jeweils, welche der Eigenschaften *Reflexivität*, *Transitivität*, *Symmetrie*, *Antisymmetrie*, *Funktionalität* jede der folgenden Relationen erfüllt. Welche der genannten Relationen sind Äquivalenzrelationen, welche Ordnungsrelationen?
- (a)  $A = B = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ ,
  - (b)  $A = B = \{a \mid a \text{ ist Wort im Wörterbuch } X\}$ ,  $a$  steht in Relation zu  $b$ , wenn  $a$  früher als  $b$  im Wörterbuch  $X$  vorkommt,
  - (c)  $A = B = \mathbb{N}$ ,  $aRb \Leftrightarrow b$  ist ein ganzzahliges Vielfaches von  $a$ .

23. Wir definieren auf  $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  die Relation  $\sim$  durch  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2$ . Zeigen Sie, dass für alle  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} \in A$  gilt: Wenn  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}$ , so gilt auch  $\begin{pmatrix} a_1 b_3 + b_1 a_3 \\ b_1 b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 b_4 + b_2 a_4 \\ b_2 b_4 \end{pmatrix}$ . Welche Bedeutung hat das für das Rechnen mit Brüchen?
24.  $R_1$  und  $R_2$  seien zwei Äquivalenzrelationen auf  $A$ . Untersuchen Sie, ob  $R_1 \cap R_2$  und  $R_1 \cup R_2$  Äquivalenzrelationen auf  $A$  sind.
25. (a) Geben Sie eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf eine echte Teilmenge von  $\mathbb{N}$  an.  
 (b) Geben Sie eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $\mathbb{Z}$  an.
26. Berechnen Sie:  
 $\text{ggT}(217, 1036), \quad \text{ggT}(779, 544), \quad \text{kgV}(155, 217)$ .
27. Bestimmen Sie  $x, y \in \mathbb{Z}$ , sodass  

$$14x + 11y = 1.$$
 Sind  $x, y$  eindeutig bestimmt?
28. Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.  
 (a)  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ ,  
 (b)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto x^2$ ,  
 (c)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ ,  
 (d)  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  (=Dirichlet'sche Sprungfunktion).
29. Bestimmen Sie (wenn möglich) Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen bzw. begründen Sie, warum es keine Umkehrfunktion geben kann.  
 (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 5x^3 - 7$ ,  
 (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto |x|$ ,  
 (c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 2$ ,  
 (d)  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos(x)$ .
30. Veranschaulichen Sie die folgenden Funktionen durch Pfeildiagramme und untersuchen Sie auf *Injektivität, Surjektivität, Bijektivität*  
 (a)  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c\}, f = \{(1, b), (2, c), (3, c), (4, a), (5, b)\}$ ,  
 (b)  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}, f = \{(1, f), (2, b), (3, a), (4, d), (5, e)\}$ ,  
 (c)  $g \circ f$ , wobei  $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}, g : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{I, II, III, IV\}, f = \{(1, b), (2, a), (3, c), (4, d)\}, g = \{(a, III), (b, IV), (c, II), (d, I)\}$ .