Algebra für Informatiker und Informatikerinnen
1. Übungsblatt für den 11. und 12. März 2010

1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$\{1\} = \{\{1\}\}$	$\{1\} = \{1,1\}$	$\{1,2\}=\{\{1\},2\}$
$\{\{2\},1\}=\{\{1\},2\}$	$\{2,\{1\}\}=\{\{1\},2\}$	$\{\}=\{\{\}\}$

2. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$\{\}=\{0\}$	$0\in\{\}$	$\{\}\subseteq\{1\}$
$\{\} \in \{1\}$	$\{\} \in \{\{\}\}$	$\{\}\subseteq\{\{\}\}$

3. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$2\in\{1,\{2\}\}$	$\{1\}\in\{1,\{2\}\}$	$\{2\}\in\{1,\{2\}\}$
$1\subseteq\{1\}$	$1 \in \{\{1\}\}$	$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$

4. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$\{1,2\}\in\{1,2,3\}$	$\{1,2\}\in\{\{1,2\},3\}$	$\{1,2\}\in\{\{1,2,3\}\}$
$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}\subseteq\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Q}\in\mathbb{R}$

5. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$\{1\}\in\mathbb{N}$	$1\in\mathbb{N}$	$1\in\{\mathbb{N}\}$
$\mathbb{N}\subseteq\{\mathbb{N}\}$	$\{\mathbb{N}\}\subseteq\{\{\mathbb{N}\},\mathbb{Z}\}$	$\{\mathbb{Z}\}\subseteq\{\{\mathbb{N}\},\mathbb{Z}\}$

6. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

$\{\mathbb{N}\}\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Z}\in\{\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$	$\{\} \in \mathbb{N}$
$\{\} \subseteq \{\mathbb{N}\}$	$\{\} \subseteq \mathbb{N}$	$\mathbb{Z}\in\mathbb{N}$

7. (a) Berechnen Sie $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}[(-1)^i, i\,]$ (b) Berechnen Sie $\bigcup_{r\in\mathbb{R}, r>1}]\frac{1}{r}, r+1[$

8. Seien $A_1, A_2, A_3, \ldots$ offene Intervalle mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$
Ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ wieder ein offenes Intervall?

9. Zeigen Sie für Mengen A, B, C: $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

10. Gilt für beliebige Mengen A, B, C auch: $A\cup(B\Delta C) = (A\cup B)\Delta(A\cup C)$?

11. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt : $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

12. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ gilt : $2^n > 2n + 1$

13. Zeigen Sie anhand eines Beispiels (Übung 1.7 aus dem Skript gilt nicht!), dass der Induktionsschritt alleine nicht als Beweis für Aussagen über die natürlichen Zahlen ausreicht, der Induktionsanfang muss ebenfalls erfüllt sein.

14. Definieren Sie analog zu Def. 1.6 ein geordnetes Tripel (a_1, a_2, a_3) über Mengen. Vorsicht: Achten Sie darauf, dass die Definition konsistent ist!

15. Zeigen Sie: $\sqrt{3}$ ist irrational.