

■ Übungsbeispiel 2

Partialbruchzerlegung von $\frac{x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3}{x^3 - 1}$

■ (i) Nenner faktorisieren :

$$\frac{x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3}{x^3 - 1} = \frac{x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3}{(x - 1)(ax^2 + bx + c)}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$x^3 - 1 = -c - bx + cx - ax^2 + bx^2 + ax^3$$

$$x^3 - 1 = -c + (-b + c)x + (-a + b)x^2 + ax^3$$

also (Koeffizientenvergleich)

$$a = 1$$

$$-a + b = 0, \text{ also } b = 1$$

$$-b + c = 0, \text{ also } c = 1$$

$$\frac{-3 + x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3}{(x - 1)(ax^2 + bx + c)} = \frac{-3 + x + x^2 + 2x^3 + x^4}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\text{Factor}[x^2 + x + 1]$$

$$1 + x + x^2$$

also : $1 + x + x^2$ hat keine reellen Nullstellen

■ (ii) Ganzen Anteil abspalten (da Grad Zähler \geq Grad Nenner):

$$\text{Ansatz : Ganzer Anteil} + \frac{\text{Rest}}{\text{Nenner}},$$

Ganzer Anteil hat Grad Zähler - Grad Nenner , also Grad $4 - 3 = 1$

Rest hat Grad Nenner - 1, also Grad $3 - 1 = 1$

$$\frac{-3 + x + x^2 + 2x^3 + x^4}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$-3 + x + x^2 + 2x^3 + x^4 = (ax + b)(x - 1)(x^2 + x + 1) + cx^2 + dx + e$$

$$-3 + x + x^2 + 2x^3 + x^4 = -b + e + (-a + d)x + cx^2 + bx^3 + ax^4$$

also (Koeffizientenvergleich wie oben)

$$a = 1, b = 2, c = 1, d = 2, e = -1$$

also :

$$\frac{-3 + x + x^2 + 2x^3 + x^4}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = x + 2 + \frac{x^2 + 2x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

■ (iii) Partialbruchzerlegung:

Ansatz (Grad Zähler = Grad Nenner + 1, keine doppelten Nullstellen hier im Nenner) :

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$x^2 + 2x - 1 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 1 = a - c + (a - b + c)x + (a + b)x^2$$

also :

$$a + b = 1, \quad a - b + c = 2, \quad a - c = -1$$

also :

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{5}{3}$$

Somit lautet das Endergebnis :

$$\begin{aligned} \frac{x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3}{x^3 - 1} &= x + 2 + \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = x + 2 + \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}{x^2 + x + 1} = \\ &= x + 2 + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x+5}{3(x^2 + x + 1)} \end{aligned}$$

■ Kontrolle Endergebnis mit *Mathematica* :

`Apart` ... macht Partialbruchzerlegung , auch wenn die Grade nicht passen

$$\text{Apart} \left[\frac{x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3}{x^3 - 1} \right]$$

$$2 + \frac{2}{3(-1+x)} + x + \frac{5+x}{3(1+x+x^2)}$$

■ Kontrolle Zwischenergebnisse mit *Mathematica* :

`PolynomialRemainder` ... berechnet Rest

`PolynomialQuotient` ... berechnet ganzen Anteil

$$\text{PolynomialRemainder} [x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3, x^3 - 1, x]$$

$$-1 + 2x + x^2$$

$$\text{PolynomialQuotient} [x + x^2 + 2x^3 + x^4 - 3, x^3 - 1, x]$$

$$2 + x$$

■ *Mathematica* Nebenrechnungen für dieses Beispiel

`Collect` ... ordnet nach Potenzen

`Expand` ... multipliziert aus

$$\text{Collect} [\text{Expand} [(x-1)(ax^2 + bx + c)], x]$$

$$-c + (-b+c)x + (-a+b)x^2 + ax^3$$

$$\text{Collect} [\text{Expand} [(ax+b)(x-1)(x^2+x+1) + cx^2 + dx + e], x]$$

$$-b+e + (-a+d)x + cx^2 + bx^3 + ax^4$$

```
Collect[Expand[a (x^2 + x + 1) + (b x + c) (x - 1)], x]
```

```
a - c + (a - b + c) x + (a + b) x^2
```

```
Solve[{a + b == 1, a - b + c == 2, a - c == -1}, {a, b, c}]
```

```
{ {a -> 2/3, b -> 1/3, c -> 5/3} }
```