

## ■ Übungsbeispiel

Partialbruchzerlegung von  $\frac{-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5}{x^2 - 1}$

### ■ (i) Nenner faktorisieren :

$$\frac{-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5}{x^2 - 1} = \frac{-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5}{(x - 1)(x + 1)}$$

### ■ (ii) Ganzen Anteil abspalten (da Grad Zähler $\geq$ Grad Nenner):

Ansatz : Ganzer Anteil +  $\frac{\text{Rest}}{\text{Nenner}}$ ,

Ganzer Anteil hat Grad Zähler - Grad Nenner , also Grad  $5 - 2 = 3$

Rest hat Grad Nenner - 1, also Grad  $2 - 1 = 1$

$$\frac{-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5}{(x - 1)(x + 1)} = ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{ex + f}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x - 1)(x + 1) + ex + f$$

$$-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5 = -d + f + (-c + e)x + (-b + d)x^2 + (-a + c)x^3 + bx^4 + ax^5$$

also (Koeffizientenvergleich wie oben)

$$a = 2, b = -8, c = 1, d = 0, e = 2, f = -3$$

also :

$$\frac{-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5}{(x - 1)(x + 1)} = 2x^3 - 8x^2 + x + \frac{2x - 3}{(x - 1)(x + 1)}$$

### ■ (iii) Partialbruchzerlegung:

Ansatz (Grad Zähler = Grad Nenner + 1, keine doppelten Nullstellen hier im Nenner) :

$$\frac{2x - 3}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$$

$$2x - 3 = a(x + 1) + b(x - 1)$$

$$2x - 3 = a - b + (a + b)x$$

also :

$$a + b = 2, a - b = -3$$

also :

$$a = \frac{-1}{2}, b = \frac{5}{2}$$

Somit lautet das Endergebnis :

$$\frac{-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5}{x^2 - 1} = 2x^3 - 8x^2 + x + \frac{2x - 3}{(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= 2x^3 - 8x^2 + x + \frac{\frac{-1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{5}{2}}{x+1} = 2x^3 - 8x^2 + x - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)}$$

Stimmt :)

#### ■ Kontrolle Endergebnis mit *Mathematica* :

`Apart` ... macht Partialbruchzerlegung, auch wenn die Grade nicht passen

$$\text{Apart}\left[\frac{-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5}{x^2 - 1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2(-1+x)} + x - 8x^2 + 2x^3 + \frac{5}{2(1+x)}$$

#### ■ Kontrolle Zwischenergebnisse mit *Mathematica* :

`PolynomialRemainder` ... berechnet Rest

`PolynomialQuotient` ... berechnet ganzen Anteil

$$\text{PolynomialRemainder}[-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5, (x-1)(x+1), x]$$

$$= -3 + 2x$$

$$\text{PolynomialQuotient}[-3 + x + 8x^2 - x^3 - 8x^4 + 2x^5, (x-1)(x+1), x]$$

$$= x - 8x^2 + 2x^3$$

#### ■ Mathematica Nebenrechnungen für dieses Beispiel

`Collect` ... ordnet nach Potenzen

`Expand` ... multipliziert aus

$$\text{Collect}[\text{Expand}[(ax^3 + bx^2 + cx + d)(x-1)(x+1) + ex + f], x]$$

$$= -d + f + (-c + e)x + (-b + d)x^2 + (-a + c)x^3 + bx^4 + ax^5$$

$$\text{Collect}[\text{Expand}[a(x+1) + b(x-1)], x]$$

$$= a - b + (a + b)x$$

$$\text{Solve}[\{a + b == 2, a - b == -3\}, \{a, b\}]$$

$$\left\{\left\{a \rightarrow -\frac{1}{2}, b \rightarrow \frac{5}{2}\right\}\right\}$$