Algebra (Mathematik 2)
7. Übungsblatt für den 22./23. November 2007

1. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender linearer Gleichungssysteme:

   (a) $A \cdot x = 0$,

   (b) $A \cdot x = b$,

   (c) $A \cdot x = c$.

2. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix, und sei x_0 eine Lösung des Systems $A \cdot x = b$. Sei L die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ und $N(A)$ der Nullraum von A. Zeigen Sie, dass $L \supseteq x_0 + N(A)$.

3. Widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels: Wenn das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eine Lösung hat, so besitzt für jede rechte Seite b das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ zumindest eine Lösung.

4. Gegeben sind die Ebene ϵ mit der Basis

$$A = (\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$$

   und die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Koordinaten von u, v, w bezüglich der Basis A. (d.h. $(u)_A, (v)_A, (w)_A$.)

5. Die Ebene ϵ hat die Basen

$$B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$$

und

$$C = (\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}).$$

(a) Der Vektor v hat bezüglich C die Koordinaten $(v)_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich B.

(b) Der Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich C.

6. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis für $N(A) + N(B)$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für $N(A) \cap N(B)$.

7. Seien

$$U = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}), V = L(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

(a) Berechnen Sie eine Basis von $U + V$.

(b) Berechnen Sie eine Basis von $U \cap V$.

8. Implizitisieren Sie die lineare Mannigfaltikeit $b + Z(A)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(D.h. Berechnen Sie einen Vektor d und eine Matrix C, sodass $b + Z(A) = \{x \in R^4 | C \cdot x = d\}$.)