Algebra (Mathematik 2)
5. Übungsblatt für den 8./9. November 2007

1. Sind folgende Vektoren jeweils linear abhängig?

   (a) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix})$.

   (b) $(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix})$.

2. Sind folgende Vektoren jeweils linear unabhängig?

   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Zeigen Sie: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$. Wenn $(b_1, \ldots, b_m)$ linear abhängig ist, dann gibt es ein $k \in \{1, \ldots, m\}$, sodass b_k in $L(b_1, \ldots, b_{k-1})$ liegt.

4. Zeigen Sie: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $B := \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn es ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, sodass $L(B) = L(B \setminus \{b_k\})$ ist, dann sind $b_1, \ldots, b_m$ linear abhängig.

5. Geben sie eine Basis für folgende lineare Hüllen an:

   (a) $L(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$

   (b) $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix})$

(c) $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

6. Bestimmen Sie eine Basis von $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, die weder $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ noch $\mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) enthält.

7. Finden Sie eine Matrix B in Zeilenstaffelnormalform, deren Zeilenraum der gleiche ist wie der Zeilenraum der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Finden Sie Basis und Dimension der Unterräume $N(A)$ (Nullraum von A), $Z(A)$ (Zeilenraum von A) und $S(A)$ (Spaltenraum von A), wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$