Algebra (Mathematik 2)
4. Übungsblatt für den 25./26. Oktober 2007

Achtung: Die Teilnehmer der Freitagsgruppen können die Übungen bis Donnerstag dem 25.10.07 abgeben oder aber auch eine Übungsgruppe am Donnerstag besuchen.

1. Bestimmen Sie eine parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge des Gleichungssystemes $A \cdot x = b$ wobei

   (a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie eine parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge des Gleichungssystemes $A \cdot x = b$ wobei

   (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie eine parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_5 + 3x_6 &= 1 \\
2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 2 \\
2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 2x_6 &= 0 \\
-x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 &= 2 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 &= 1
\end{aligned}$$

4. Ergänzen Sie die Gleichung

$$3x - 2y + 5z = 0$$

so zu einem Gleichungssystem mit drei Gleichungen, dass das System

(a) keine Lösung
(b) genau eine Lösung
(c) genau zwei Lösungen
(d) eine Gerade als Lösungsmenge
(e) eine Ebene als Lösungsmenge

hat.

5. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sin.

(a) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | 2x - 5y = 0\}$.
(b) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x + 2y \leq 0\}$.
(c) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^2 = 0\}$.

6. (a) Liegt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

(b) Können Sie $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von v_1 und v_2 schreiben?

7. Zeigen Sie: Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, und seien $v_1, \ldots, v_m$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $L(v_1, \ldots, v_m)$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

8. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
Ist $a = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ im Nullraum von A, ist $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Zeilenraum von A, ist $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Spaltenraum von A?