

Algebra (Mathematik 2)
3. Übungsblatt für den 18./19. Oktober 2007

1. Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms $ABCD$ mit den Eckpunkten $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2. Seien \vec{a}, \vec{b} und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

(b) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

3. Gegeben ist eine Kugel mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Radius 3.

(a) Geben Sie die Kugel in impliziter Darstellung an.

(b) (Bonus) Geben Sie die Kugel in Parameterdarstellung an.

4. Geben Sie die Ebene durch die Punkte A , B und C in Parameterform und in impliziter Form an:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) Geben Sie folgende Ebene in impliziter Form an:

$$e_1 : X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie folgende Ebene in Parameterform an:

$$e_2 : -x - y + 5z = -2.$$

6. Geben Sie die Gerade durch die Punkte A und B in Parameterform und in impliziter Form an:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7. Gegeben sind die Geraden

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$h: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob sich die beiden Geraden schneiden und berechnen Sie gegebenenfalls Schnittpunkt und Schnittwinkel.

8. Berechnen Sie folgende Produkte (falls definiert):

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$