Mathematik 2 (Algebra)
14. Übungsblatt für den 31. Jänner / 1. Februar 2008

1. Welche der folgende Abbildungen sind linear?

   (a) Translation $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$;

   (b) Spiegelung s des $\mathbb{R}^2$ an $2x - y = 1$;

   (c) Drehung d des $\mathbb{R}^2$ um $45°$ um den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Sie spiegeln die Vektoren im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $2x - y = 0$ und drehen anschliessend um $45°$ gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt. Geben Sie die Darstellungsmatrix dieser Abbildung bezüglich der kanonischen Basis an.

3. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Spiegelung s an der Ebene $x - 2y + 3z = 0$ bezüglich der kanonischen Basis.

4. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Drehung d um $30°$ um die Gerade $L((1, -2, 3))$ bezüglich der kanonischen Basis. Beim Blick von $(1, -2, 3)$ auf die Ebene $x - 2y + 3z = 0$, sollen sich die Punkte der Ebene gegen den Uhrzeigersinn drehen.

5. Sei $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$, und sei $h : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $h(V)$ und $\ker(h)$ Unterräume von W bzw. V sind.

6. Sei
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

   (a) Bestimmen Sie den Kern von h.

   (b) Was ist die Dimension von $h(\mathbb{R}^3)$?

   (c) Bestimmen Sie das Bild von h.

7. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen den Ebenen $2x - y + z = 0$ und $x - 2y + z = 0$ an.

8. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K mit $\dim(V) = \dim(W)$. Zeigen Sie, dass U und V isomorph sind.