

Mathematik 2 (Algebra)

13. Übungsblatt für den 24./25. Jänner 2008

1. Ist $x^2 - 6x + 11$ irreduzibel über \mathbb{R} ? Über \mathbb{C} ?
2. Sei p eine Primzahl. Wieviele normierte quadratische irreduzible Polynome gibt es über \mathbb{Z}_p ? Wieviele normierte irreduzible Polynome vom Grad 3?
3. Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n \times m}$. Zeigen Sie, dass $h : K^m \rightarrow K^n$, $x \rightarrow A \cdot x$, linear ist.
4. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung von linearen Funktionen linear ist.
5. Eine lineare Abbildung h auf \mathbb{R}^2 erfüllt $h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ und $h\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
6. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $S_h(B, C)$ für $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + z \end{pmatrix}$ und $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
7. Geben Sie eine Basis B von \mathbb{R}^3 an, für die die Normalprojektion p auf die Ebene $x - 2y + 3z = 0$ eine möglichst einfache Darstellungsmatrix $S_p(B, B)$ hat.
8. Die Ebene ε hat die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ und } C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie Matrizen S und T , sodass für alle $v \in \varepsilon$ gilt:

$$(v)_B = S \cdot (v)_C \text{ und } (v)_C = T \cdot (v)_B.$$