Algebra (Mathematik 2)
12. Übungsblatt für den 17./18. Jänner 2008

1. (a) Verschlüsseln Sie das Wort „MAUS“ (1=A, 2=B, 3=C, …) mit dem RSA-Verfahren, $(p,q)=(5,7)$ und geeignetem *k*.
   (b) Machen Sie die Probe (entschlüsseln).

2. (a) Finden Sie einen Ring, in dem alle Körpereigenschaften außer 6.7 (2) erfüllt sind.
   (b) Finden Sie einen Ring, in dem alle Körpereigenschaften außer 6.7 (3) erfüllt sind.

3. Sei $P(M)$ die Menge aller Teilmengen einer Menge M (**Potenzmenge**) und sei $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   Ist $(P(M), \Delta, \cap)$ ein Körper? Falls nein, welche Körpereigenschaften sind erfüllt?
   Bestimmen Sie gegebenenfalls neutrale Elemente.

4. Ein Unterring I eines Ringes R heißt ein **Ideal**, wenn gilt :
   für i $\in$ I und r $\in$ R liegen auch i r und r i in I.
   Finden Sie ein nicht-triviales Ideal in $\mathbb{Z}$.

5. Zeigen Sie : Ein Körper K besitzt nur die beiden trivialen Ideale $\{0\}$ und K.

6. Ein Ring R heißt **nullteilerfrei** genau dann, wenn für alle r, s $\in$ R gilt :
   $r \cdot s = 0 \Rightarrow (r=0) \vee (s=0)$
   Zeigen oder widerlegen Sie :
   (a) Jeder nullteilerfreie Ring ist ein Körper.
   (b) Jeder Körper ist nullteilerfrei..

7. Seien $f = 2x^4 + 3x$, $g = 2x^3 + 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
   Finden Sie $s,t \in \mathbb{Z}_5[x]$ mit $ggT(f,g) = s \cdot f + t \cdot g$.

8. Wie Bsp. 7 für : $f = 2x^5 - 2x$, $g = (x^2-1)^2 \in \mathbb{R}[x]$