

### Bsp. Spiegelung an $g : 2x - y = 1$

Die Spiegelung an einer Geraden, die nicht durch den Nullpunkt geht, ist nicht linear (etwa weil  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nicht auf sich selbst abgebildet wird, vgl. Aufgabe 14.1). Sie lässt sich aber als Hintereinanderausführung einer linearen Abbildung mit Verschiebungen beschreiben.

Sei  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Spiegelung an  $g : 2x - y = 1$ . Ein Punkt auf  $g$ , beispielsweise  $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , wird durch  $s$  auf sich selbst abgebildet. Seien  $r$  der Richtungsvektor und  $n$  der Normalvektor von  $g$ . Ein Blick auf eine Skizze zeigt, dass

$$\begin{aligned} s(v+r) &= v+r, \\ s(v+n) &= v-n. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$s(v+u) = v + s_0(u) \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^2,$$

wobei  $s_0$  die Spiegelung an der Geraden  $g_0 : 2x - y = 0$  durch den Nullpunkt ist. Demnach gilt

$$s(x) = v + s_0(x-v) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

Man kann das auch so interpretieren:  $s$  ist die Hintereinanderausführung folgender Funktionen.

1. Zuerst verschieben wir die Gerade  $g$  in den Nullpunkt mit

$$t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow x - v.$$

(Idee: Wir rechnen in einem lokalen Koordinatensystem, dessen Ursprung der Punkt  $v$  ist.)

2. Dann spiegeln wir an  $g_0$  mit  $s_0$ .
3. Zuletzt verschieben wir wieder in die Gegenrichtung mit

$$t^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow x + v.$$

Es gilt also

$$s = t^{-1} \circ s_0 \circ t.$$

Für die konkrete Darstellung von  $s$  bestimmen wir die Darstellungsmatrix von  $s_0$  bezüglich der kanonischen Basis (vgl. Aufgabe 14.2). Wir erhalten

$$S_{s_0}(E_2, E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$s(x) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Geometrische Abbildungen, wie z.B. Drehungen mit Mittelpunkt verschieden vom Nullpunkt, lassen sich auf die gleiche Art beschreiben.