Übungen zu
Algebra für InformatikerInnen
10. Übungsblatt für den 26./27.5.2011

1. Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Sei $B = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a\rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b\rangle \end{pmatrix}$ hat. Dafür müssen Sie zeigen, dass

$$(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a\rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b\rangle \end{pmatrix}$$

gilt. Stimmt diese Formel für jede Basis des $\mathbb{R}^2$? Was ist besonderes an der Basis B?

2. Welcher Punkt auf der Geraden

$$g = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$$

hat von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ den kleinsten Abstand?

3. Sei $p = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$ und $U = L(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix})$. Welcher Punkt $p_0 \in U$ hat von p den kleinsten Abstand?

4. Sei $p = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$ und $U = L(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Welcher Punkt $p_0 \in U$ hat von p den kleinsten Abstand?

5. Welcher Punkt in der Ebene

$$e = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

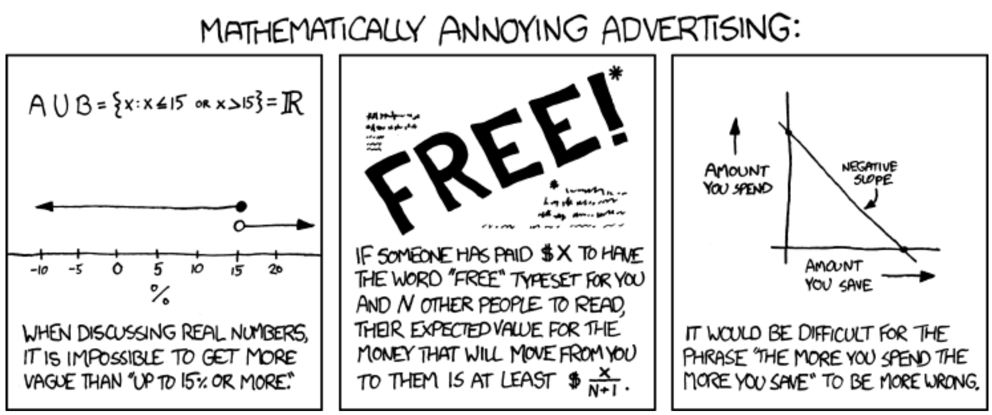
kommt dem Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ am nächsten? Rechnen Sie mit der expliziten Form. (Siehe "Bestapproximierende Lösung von linearen Gleichungssystemen" von Herren Wendt).

6. Sei e, P wie beim letzten Aufgabe. Mit welchem $v \in \mathbb{R}^3$ und $d \in \mathbb{R}$ ist

$$e = \{x : \langle x, v \rangle = d\}?$$

Berechnen Sie den Normalabstand von P zu e anhand von Satz 4 in "Projektion von Vektoren, Normalvektoren" von Herrn Wendt. Überprüfen Sie dieses Resultat mit Aufgabe 5.

7. Bestimmen Sie jene Gerade der Form $y = kx + d$, die die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bestmöglich approximiert. Siehe dazu den Hinweis bei Übung 5.31 im Skriptum.



Courtesy of xkcd.com