Übung Algebra für Informatiker, SS11
9. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 19.5./20.5.2011

1. Gegeben ist folgende Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie eine Basis des Zeilenraumes der Matrix A mithilfe von Algorithmus 4.23 aus dem Skriptum. Wie groß ist die Dimension des Zeilenraumes?
Berechnen Sie weiters eine Basis des Spaltenraumes der Matrix A mithilfe von Algorithmus 4.23 aus dem Skriptum. Wie groß ist die Dimension des Spaltenraumes?

2. Berechnen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}^4$ die auf allen $y \in Z(A)$ (Zeilenraum der Matrix A aus Beispiel 1) senkrecht stehen.

3. Berechnen Sie den Nullraum der Matrix A aus Beispiel 1. Wie groß ist die Dimension des Nullraumes. Vergleichen Sie $N(A)$ mit der Lösung aus dem letzten Beispiel.

4. Begründen Sie, dass die folgenden 3 Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden:
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie weiters mithilfe des Austauschsatzes von Steinitz eine Basis, die die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Vektoren aus $\{b_1, b_2, b_3\}$ enthält.

5. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ aus dem letzten Beispiel.

6. Die Ebene e ist durch $e = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ gegeben. Begründen Sie, dass dieser Unterraum des $\mathbb{R}^3$ die Basen
$$B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}) \quad \text{und} \quad C = (\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix})$$
hat. Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(v)_B$.