Übung Algebra für Informatiker, SS11
7. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 5.5./6.5.2011

1. Sind folgende Ebenen Unterräume des $\mathbb{R}^3$? Geben sie an, welche der Eigenschaften (1),(2) und (3) in Definition 4.1 erfüllt sind!
   a) $\epsilon_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.
   b) $\epsilon_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Sind folgende Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig? Finden Sie, falls die Vektoren linear abhängig sind, eine Linearkombination, die den Nullvektor ergibt, und bei der nicht jeder Vektor 0 mal genommen wird.
   (a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,
   (b) $\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

3. Finden Sie, falls möglich, 3 Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (b, c), (a, b) und (a, c) linear unabhängig sind und (a, b, c) linear abhängig sind.

4. Bestimmen Sie den Nullraum $N(A)$ folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & 12 & 8 \\ 7 & 1 & 13 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Man weiß, bzw. kann leicht nachrechnen, dass $N(A)$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist. Identifizieren Sie eine Basis von $N(A)$.