Übung „Algebra für Informatiker“, SS 2011
5. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 7./8.4.2011

Beispiel 1

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 & -15 & 15 \\ 0,3 & 0,75 & 0 \\ 0 & -0,75 & 0,3 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Inversen von A und B.

(ii) Verwenden Sie die Resultate, um die wie folgt spezifierten Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ und $y \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B \cdot y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

Es sei A eine reguläre 2×2-Matrix. Leiten Sie eine explizite Formel für $(A^T)^{-1}$ her.

Beispiel 3

Es seien A und B zwei reguläre $n \times n$-Matrizen, $n \geq 1$. Prüfen Sie, ob im allgemeinen dann auch folgende Matrizen regulär sind; geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel:

(i) $A + B$;

(ii) λA, worin $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(iii) $A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A$.

Beispiel 4

Für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ ist folgende Matrix regulär, für welche nicht? Geben Sie jeweils eine Begründung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

Beispiel 5

Es seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen, $n \geq 1$; A sei regulär, B jedoch singulär. Prüfen Sie, ob im allgemeinen dann

(i) $A \cdot B$;

(ii) $B \cdot A$

regulär sind; geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.

Beispiel 6

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z - t &= 6, \\ 5x - 3y - z + t &= 12, \\ -x + 3y + 2z - t &= 18 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5, \\ -x + \lambda y &= 5, \end{aligned}$$

worin $\lambda \in \mathbb{R}$ fix gegeben ist. Falls es mehr als eine Lösung gibt, geben sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an.

Beispiel 7

Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem $A \cdot x = y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist.

Interpretieren Sie sodann dieses Resultat geometrisch: Zeigen Sie, daß das Bild von A, d.h. die Menge

$$\{A \cdot x \colon x \in \mathbb{R}^3\},$$

eine Ebene ist, in der y nicht liegt.

Beispiel 8

Bestimmen Sie für folgende Paare einer Matrix in Staffelform und eines Vektors die Menge $\{x \in \mathbb{R}^4 \colon A \cdot x = y\}$ in parametrisierter Form.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.