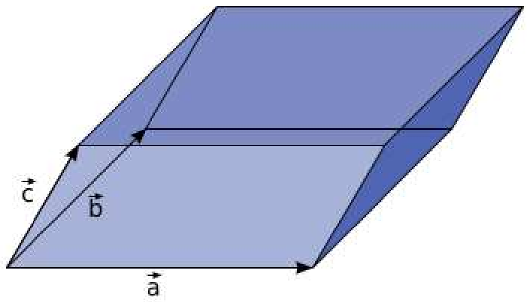
Übung „Algebra für Informatiker“, SS 2011
4. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 31.3./1.4.2011

Beispiel 1

Gegeben sei ein Parallelepiped mit den Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$; siehe Zeichnung:



(i) Geben Sie eine Formel für die Oberfläche an.

(ii) Zeigen Sie, daß das Volumen $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ beträgt.

Beispiel 2

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 2 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Produkte je zweier (nicht notwendig verschiedener) dieser Matrizen, sofern definiert.

Beispiel 3

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A^T \cdot A$ und $A \cdot A^T$.

Beispiel 4

Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, $n \geq 1$. A sei symmetrisch, d.h. $A^T = A$. Weiter seien x und y Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$, auch auffaßbar als $n \times 1$-Matrizen. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\langle A \cdot x, y \rangle = \langle x, A \cdot y \rangle.$$

Hinweis. Berechnen Sie explizit den Wert beider Seiten in Abhängigkeit von den Einträgen in A, x und y.

Beispiel 5

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob es eine 2×2-Matrix C gibt, so daß $A \cdot C = E$ gilt, und ob es eine 2×2-Matrix D gibt, so daß $D \cdot B = E$ gilt. Berechnen Sie C und D gegebenfalls. Hierin ist $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die zweidimensionale Einheitsmatrix.

Beispiel 6

Gegeben seien die $n \times n$-Matrizen A, B und C. Beweisen Sie, daß

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Hinweis. Unter Benutzung der Formeln für die Matrizenmultiplikation und -addition ist jeder einzelne Eintrag der Matrix auf der linken Seite und derjenigen auf der rechten Seite anzugeben.

Beispiel 7

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen.

(i) Zeigen Sie durch ein möglichst einfaches Gegenbeispiel, daß die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, d.h. $A \cdot B$ im allgemeinen von $B \cdot A$ verschieden ist.

(ii) Es seien A und B Diagonalmatrizen; das bedeutet, daß alle Einträge außerhalb der Diagonalen 0 sind, d.h. A und B je von der Form

$$E = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

sind. Zeigen Sie, daß dann $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.