Übung „Algebra für Informatiker“, SS 2011
8. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 12./13.5.2011

Beispiel 1

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß sowohl die vier Spaltenvektoren als auch die vier Zeilenvektoren von A eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

Versuchen Sie sodann, das Beispiel zu verallgemeinern; für Matrizen welcher Form gilt die gleiche Aussage?

Beispiel 2

Gegeben sei die Matrix

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{pmatrix},$$

worin $s, t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge $P = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \colon\ A_{s,t} \text{ ist regulär}\}$, und begründen Sie Ihre Lösung. Bestimmen Sie des weiteres ${A_{s,t}}^{-1}$ für den Fall $(s,t) \in P$.

Beispiel 3

Gegeben sei folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R}\}$$

Bestimmen Sie die Menge derjenigen $x \in \mathbb{R}^4$, die senkrecht auf jedem $y \in U$ stehen.

Beispiel 4

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, daß

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

gilt.

Geben Sie sodann für den Fall, daß alle drei Vektoren in einer Ebene liegen, eine geometrische Interpretation dieses Zusammenhangs.