Algebra für Informatiker/innen
10. Übungsblatt für den 28. und 29. Mai 2009

1. Gegeben sei der Punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Eben $\varepsilon : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie $R \in \varepsilon$ mit kürzestem Abstand zu P.

2. Bestimmen Sie jene Punkte auf den Mannigfaltigkeiten $M_1 = (1,0,2,1) + L((1,0,0,1),(4,1,0,0))$ und $M_2 = (0,1,0,0) + L\big((6,1,0,2),(5,1,0,1)\big)$, die voneinander geringsten Abstand haben.

3. Seien $y = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Bestimmen Sie die Projektion von y auf u und stellen Sie y als Summe zweier zueinander orthogonaler Vektoren dar.
   (b) Bestimmen Sie u' in $U = L(u)$ mit kürzestem Abstand zu y.

4. Bestimmen Sie die Projektion von $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf W$= L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sowie auf $W^\perp$ und stellen Sie das Ergebnis als Summe von Vektoren aus W und aus $W^\perp$ dar.

5. Lösen Sie Übungsaufgabe 5.20 aus dem Skript.

6. Gegeben seien die beiden Geraden $g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie die beiden nächstliegenden Punkte der Geraden und deren Abstand.

7. Ein Spiegel liegt in der Ebene $\varepsilon : x + 2y + 2z = 12$. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf den Spiegel zuläuft, wird am Spiegel reflektiert. Auf welcher Geraden verläuft der reflektierte Strahl?

8. Finden Sie die bestapproximierende Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$