Algebra für Informatiker/innen
9. Übungsblatt für den 14./15. Mai 2009

Sie können Aufgaben 1 und 2 mit Mathematica oder einem anderen Programm lösen, aber Sie müssen den Rechengang in der Übung erklären können.

1. Stellen Sie folgende lineare Mannigfaltigkeiten implizit dar:
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + L(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$,
   (b) $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} + L(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.
2. Bestimmen Sie den Durchschnitt der linearen Mannigfaltigkeiten A und B aus Aufgabe 1 explizit.
3. Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ mit ONB $B = (\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (a) Bestimmen Sie die Koordinaten von $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich B.
   (b) Vergleichen Sie die Längen von u und $(u)_B$ bzw. von v und $(v)_B$. Was fällt auf?
   (c) Berechnen Sie den Winkel zwischen u und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie zwischen $(u)_B$ und $(w)_B$.
4. Orthonormalisieren Sie $B = ((4, 5, -3), (2, 1, 1), (3, 5, 1))$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.
5. Bestimmen Sie eine ONB von
   $L((2, -1, -2, 4), (0, -1, 0, 6), (1, -2, -1, 11), (9, 16, -6, 9))$.
6. Bestimmen Sie eine ONB von $e : 2x - y + 4z = 0$.
7. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
   falls $ad - bc \neq 0$.
8. Invertieren Sie folgende Matrizen falls möglich:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$