Algebra für Informatiker/innen
8. Übungsblatt für den 7./8. Mai 2009

Sie können die Rechnungen dieses Übungsblatts mit Mathematica oder einem anderen Programm lösen, aber Sie müssen den Rechengang in der Übung erklären können.

1. Zeigen Sie: Jeder Unterraum des $\mathbb{R}^3$ hat eine der folgenden Formen: $\{0\}$, Gerade durch 0, Ebene durch 0, $\mathbb{R}^3$.
2. Sei T ein Unterraum mit Dimension m , seien $b_1, \dots, b_m \in T$ linear unabhängig.
Zeigen Sie, dass $(b_1, \dots, b_m)$ eine Basis von T ist.

3. Geben Sie für die Matrizen in den Aufgaben 7.1, 7.5 und 7.6 des 7. Übungsblatts jeweils den Rang und die Dimension des Nullraums an.

4. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösungsmengen folgender lineare Gleichungssysteme an:

- (a) $A \cdot x = 0$,
 - (b) $A \cdot x = b$,
 - (c) $A \cdot x = c$.
5. Gegeben ist die Ebene e mit Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

sowie Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von u, v, w bezüglich B (d.h., $(u)_B, (v)_B, (w)_B$).

6. Die Ebene e hat Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

- (a) Der Vektor v hat bezüglich C die Koordinaten $(v)_C = (-3, 2)$. Bestimmen Sie $(v)_B$.
- (b) Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = (4, 1)$. Bestimmen Sie $(v)_C$.

7. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis von $N(A) \cap N(B)$.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von $N(A) + N(B)$.

8. Seien

$$U = L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad V = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis von $U + V$.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$.