**Algebra für Informatiker/innen**
**7. Übungsblatt für den 30. April 2009**

1. Bestimmen Sie jeweils eine Basis für die Zeilenräume folgender Matrizen:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 15 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$
Sind die Zeilen der Matrizen linear unabhängig?

2. Bestimmen Sie jeweils eine Basis für die Nullräume der Matrizen aus Aufgabe 1.

3. Sei $C$ wie aus in Aufgabe 1. Geben Sie Basen für Zeilenraum, Spaltenraum, und Nullraum von $C^T$ an.

4. Finden Sie eine Basis für den Orthogonalraum $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix})^{\perp}$.

5. Verwenden Sie den Satz zum Nullraum einer Matrix in Zeilenstaffelnormalform um eine Basis von $N(B)$ für
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
zu bestimmen.

6. Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $B$ in Zeilenstaffelnormalform sodass $Z(A) = Z(B)$:
   (a) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & -3 & 5 \\ 3 & -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

7. Zeigen Sie: Der Nullraum einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times(m+1)}$ enthält einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor.

   [Hinweis: Verwenden Sie dass eine Matrix $B$ in Zeilenstaffelnormalform existiert sodass $Z(A) = Z(B)$.]

8. Zeigen Sie: Jede Menge mit 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ ist linear abhängig.

   [Hinweis: Verwenden Sie nur den Satz aus dem vorigen Beispiel.]