Algebra für Informatiker/innen
6. Übungsblatt für den 23. und 24. April 2009

1. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^2$? Welche der Unterräumeigenschaften sind erfüllt?
 - (a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 2y = 0 \right\}$
 - (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y \geq 0 \right\}$
 - (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$
2.
 - (a) Ist $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$?
 - (b) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ sodass $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und v linear abhängig sind.
3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $L(v_1, \dots, v_m)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.
4. Welche der folgenden Folgen von Vektoren sind linear unabhängig? Welche von ihnen sind Basen von $\mathbb{R}^3$?
 - (a) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
 - (b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$
 - (c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$
5. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$:
Wenn $b_1, \dots, b_m$ linear abhängig sind, dann existiert $k \in \{1, \dots, m\}$ sodass $b_k \in L(b_1, \dots, b_{k-1})$.
6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für $b_1, \dots, b_m, c \in \mathbb{R}^n$:
Wenn $c \in L(b_1, \dots, b_m)$, dann gilt $L(b_1, \dots, b_m) = L(b_1, \dots, b_m, c)$.
7. Geben Sie eine Basis für folgende Unterräume an:
 - (a) $L\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
 - (b) $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$
 - (c) $L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$
8. Finden Sie eine Basis von $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, die weder $s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ noch $s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$ enthält.