Lineare Algebra I (Sommersemester 2018)
ASB2MA2LAU, SeBMA02x02
4. Übungsblatt für den 16. und 17.4.2018

25. Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

    (a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{b} - \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle \cdot \vec{c}$,

    (b) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \left\langle \vec{b}, \vec{d} \right\rangle - \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \cdot \left\langle \vec{a}, \vec{d} \right\rangle$.

    Überprüfen Sie Ihre Berechnungen mithilfe von einem Computeralgebra System! *Hinweis: Nutzen Sie Mathematica, WolframAlpha, oder die Befehle* `Kreuzprodukt` *und* `Skalarprodukt` *in GeoGebra!*

26. Seien $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, $C = (4, 4)$.

    (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mithilfe des Kreuzprodukts!

    (b) Geben Sie ein Dreieck mit ganzzahligen Eckpunktkoordinaten an, dessen Flächeninhalt kleiner ist als der des Dreiecks ABC.

27. Im Raum seien die folgenden vier Punkte gegeben: $A(3, 0, -2)$, $B = (1, 6, 0)$, $C = (0, 6, 4)$, $D = (1, 3, 3)$.

    Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden e und f in den folgenden Fällen:

    (a) e enthält A und D, f enthält B und C,

    (b) e enthält A und B, f enthält C und D,

    (c) e enthält A und C, f enthält B und D.

    Welche geometrische Figur bilden diese vier Punkte?

28. Bestimmen Sie den Abstand der folgenden beiden Geraden im Raum: $g : X = (6, 1, 2) + \lambda(-4, -1, -1)$ und $h : X = (-3, -3, 6) + \lambda(8, 10, -6)$. *Hinweis: Der Abstand zweier Geraden wird entlang einer Verbindungslinie gemessen, die normal auf beide Geraden steht.*

29. Seien
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

    Berechnen Sie $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$, $A \cdot B^T$, $A \cdot C^T$, $B \cdot C^T$, $A^T \cdot B$, $A^T \cdot C$, $B^T \cdot C$, $A^T \cdot B^T$, $A^T \cdot C^T$, $B^T \cdot C^T$, wenn das Produkt definiert ist.

30. Seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

   (b) Kann die obige Gleichheit verallgemeinert werden?

31. Beweisen Sie den Satz 2.10 im Skriptum.

32. Sei E_n die Einheitsmatrix vom Format $n \times n$. Zeigen Sie, dass für jede $n \times k$ Matrix B gilt:

$$E_n \cdot B = B.$$