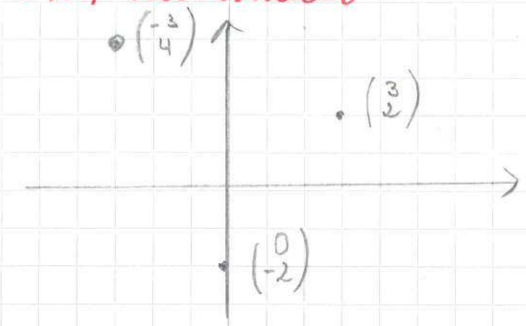
Lineare Algebra I (VO)

I Geometrie in der Ebene und im Raum

1.1 Koordinaten



Jeder Punkt wird mit einem Element von

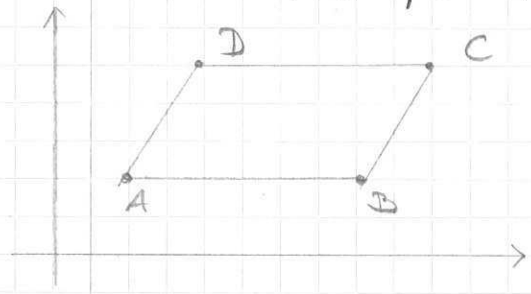
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R} \right\}$$

beschrieben.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x, y)$$

1.2 Vektoren

Bsp.: Wo liegt der Punkt C im Parallelogramm, deren Punkte A, B, D durch $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ gegeben sind?



Wie kommt man von A nach B?

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

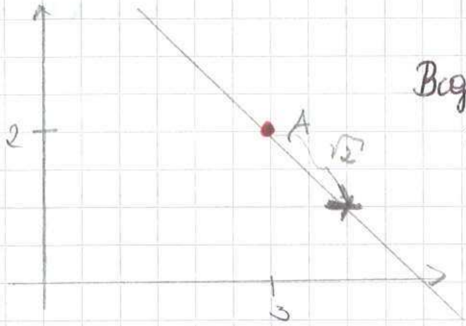
Wenn man in D startet, landet man in C. Also:

$$C = D + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}.$$

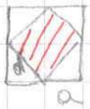
$$C = B + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}.$$

1.3 Die Länge eines Vektors

Bsp.: Herr A geht von $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ aus 1 Einheit in Richtung Südosten. Wo landet er?



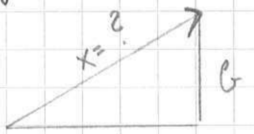
Begründung für $\sqrt{2}$:

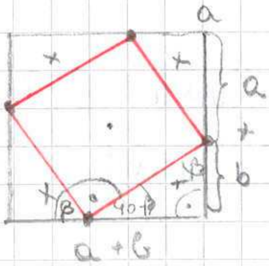


$$2d^2 = (2a)^2$$
$$2d^2 = 4a^2$$
$$d^2 = 2a^2 \quad \Big| \sqrt{} \quad d, a > 0$$
$$d = \sqrt{2}\,a$$

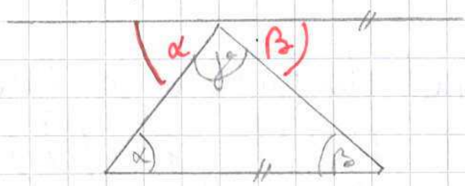
$$z = A + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix}3{,}7\\1{,}3\end{pmatrix}$$

Wir überlegen uns, wie lange der Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ist.





Begründung für $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Die rote Figur ist ein Quadrat.

Fläche des großen Quadrates:

$$F = (a+b)^2$$
$$F = x^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$
$$= (a+b)^2$$

$2A = a \cdot b$

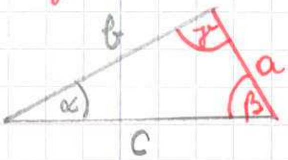
Also: $x^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Big| -2ab$

somit $x^2 = a^2 + b^2$ ⇐ Satz des Pythagoras

Wir kürzen die Länge des Vektors $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ mit $\left\|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\|$ ab. Es gilt:

$$\left\|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.4. Trigonometrie



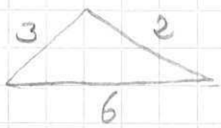
Gegeben: b, α, c

Gesucht: a, β, γ

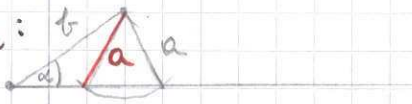
Bsp.: $a = 2$

$b = 3$

$c = 6$



ϟ So ein Δ gibt es nicht.

2 Fälle: 

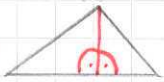
Gegeben: b, α, a

Gesucht: c, β, γ

Vorgangsweise:

(1) Löse diese Probleme für rechtwinkelige Δ.

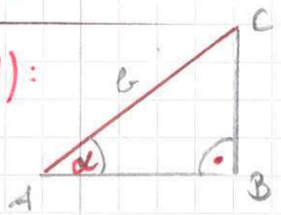
(2) Baue alle anderen Δ aus rechtwinkelige Δ zusammen.

Bsp.: 

(1) Tabelliere den Zusammenhang zw. Seitenlänge und Winkel und nenne die Tabelle sin, cos und tan.

(2) Sinussatz, Cosinussatz

---

(1): 

Gegeben: α, b, $\beta = 90°$

$a = b \cdot \sin(\alpha)$

$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{b}$

$c = b \cdot \cos(\alpha)$

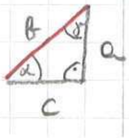
$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{c}{b}$

1. Rechtwinkelige Dreiecke

08. März 17

 $a = b \cdot \sin(\alpha)$

$c = b \cdot \cos(\alpha)$



$b = \sqrt{a^2 + c^2}$

$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$

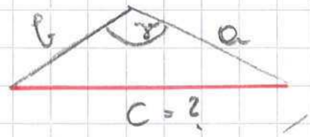
2. Allgemeine Dreiecke

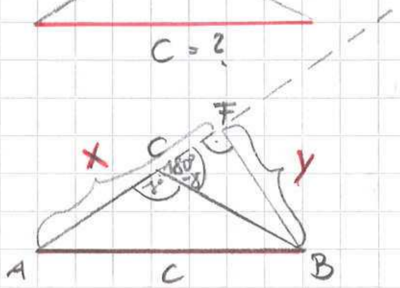
Cosinussatz löst:

Geg.: a, b Seitenlängen

γ eingeschlossener Winkel

Ges.: fehlende Seitenlänge c





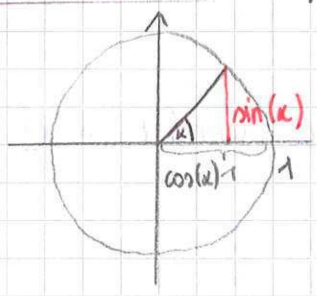
$x = \overline{AC} + \overline{CF}$ (Betrachte $\triangle CBF$)

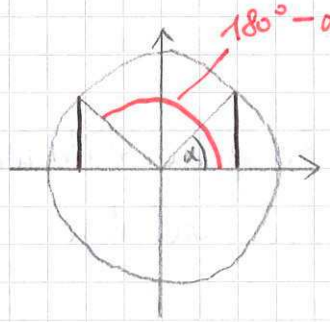
$= b + a \cdot \cos(180° - \gamma)$

$y = a \cdot \sin(180° - \gamma)$

Aus dem Satz des Pythagoras für das $\triangle ABF$ erhalten wir:

$$c^2 = x^2 + y^2$$





$$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

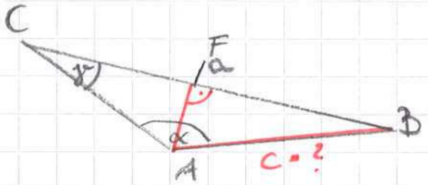
$$c^2 = (b - a \cdot \cos(\gamma))^2 + (a \cdot \sin(\gamma))^2$$
$$c^2 = b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) + a^2 \cdot (\cos(\gamma))^2 + a^2 \cdot (\sin(\gamma))^2$$
$$= b^2 - 2ab\cos(\gamma) + a^2 \cdot \underbrace{((\cos(\gamma))^2 + (\sin(\gamma))^2)}_{=1}$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

SATZ: Seien a, b Seitenlängen eines $\triangle$ und γ der eingeschlossene Winkel.
Dann gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Beweis: 1. Fall: $\gamma > 90°$, $\alpha \leq 90°$: Beweis wie oben

2. Fall: $\gamma \leq 90°$, $\alpha \leq 90°$: Beweis im Skript!

3. Fall: $\gamma \leq 90°$, $\alpha > 90°$:

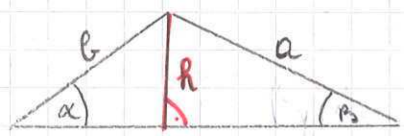


$$c^2 = (\overline{AF})^2 + (\overline{FB})^2$$
$$= (b \cdot \sin(\gamma))^2 + (a - \overline{FC})^2$$
$$= (b \sin(\gamma))^2 + (a - b \cdot \cos(\gamma))^2$$
$$\vdots$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Sinussatz löst:

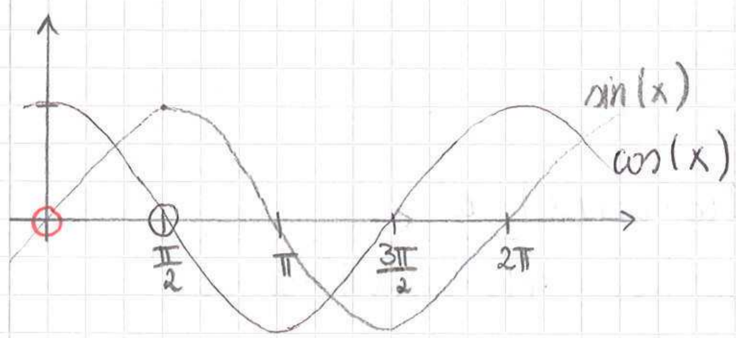
Geg.: α, β, a

Gesucht: b



$$h = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$$

Also gilt: $\dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{a}{\sin(\alpha)}$



$\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist injektiv

Konsequenz: für alle $y \in [-1, 1]$ hat die Gleichung $\cos(x) = y$ genau eine Lösung in $[0, \pi]$; die Lösung bezeichnen wir mit $\arccos(y)$.

SATZ: Sei ABC ein Dreieck mit konstanter Beschriftung. Sei d der Durchmesser des Umkreises des Dreiecks. Dann gilt:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = d.$$

Lösen aller "trigonometr. Aufgaben:

(1) Es sind a, b, c gegeben. Wir berechnen aus der Gleichung $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$ zunächst $\cos(\alpha)$ und daraus α.

(2) Es sind eine Seitenlänge und zwei Winkel gegeben.

Bsp.: c, α, β sind gegeben.

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta$$

Mit dem Sinussatz erhalten wir a, b.

(3) Es sind zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel gegeben.

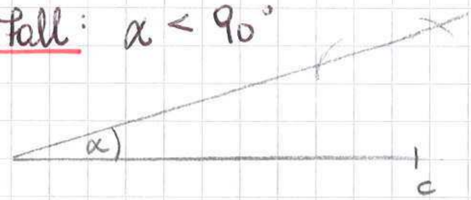
Bsp.: b, a, γ

Mit Cos-Satz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

(4) Es sind zwei Seitenlängen gegeben und der nicht eingeschlossene Winkel

Bsp.: c, α, a

1. Fall: $\alpha < 90°$



1.1. Fall: $a > c$

Es gilt: $c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) = a^2$

$$b = c \cdot \cos(\alpha) + \sqrt{(c \cdot \cos(\alpha))^2 + a^2 - c^2}$$

Variante: $\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = 30° \text{ oder } \gamma = 150° \quad ↯$$

1.2. Fall: a muss $\geq c \cdot \sin\alpha$ (Normalabstand) und $\leq c$

$\boxed{c \cdot \sin\alpha < a < c}$

Annahme: Dann gibt es zwei Lösungen für b, die wir aus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b \cdot c \cdot \cos\alpha$$ erhalten.

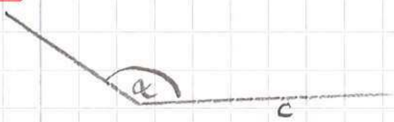
1.3. Fall: $a = c \cdot \sin\alpha$

dann gibt es genau ein Δ

1.4. Fall: $a < c \cdot \sin\alpha$

dann gibt es kein Δ

2. Fall: $\alpha > 90°$



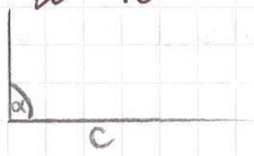
2.1. Fall: $a > c$

Dann gibt es ein Δ und wieder erhalten wir b aus den Cosinussatz.

2.2. Fall: $a \leq c$

kein Δ

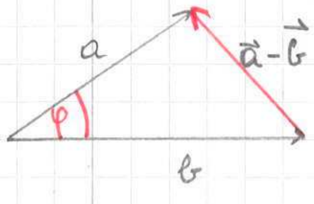
3. Fall: $\alpha = 90°$



$\Rightarrow$ siehe Skript

13.3.17

1.5 Der Winkel zwischen zwei Vektoren



Gegeben: a, b, $a \neq 0$; $b \neq 0$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Gesucht: φ

Der Cosinussatz liefert:

$$\underbrace{\|a - b\|^2}_{= \|b - a\|^2} = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 - 2 \cdot \|a\| \|b\| \cdot \cos(\varphi)$$

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 = a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2\cdot\|a\|\cdot\|b\|\cos(\varphi)$$

$$a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2 = a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2\cdot\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos(\varphi)$$

$$-2a_1b_1-2a_2b_2 = -2\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos(\varphi) \qquad a\neq 0,\ b\neq 0$$

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{\|a\|\cdot\|b\|}}$$

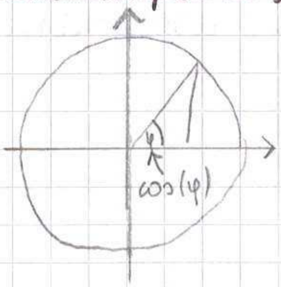
DEFINITION: Das Skalarprodukt $\langle a,b\rangle$ der Vektoren $a=\binom{a_1}{a_2}$ und $b=\binom{b_1}{b_2}$ ist definiert durch $\langle a,b\rangle := a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$

Bemerkung: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Hier: $\langle a,b\rangle$ od. $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

Winkelformel: $\cos(\varphi) = \dfrac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}$

$$\Rightarrow \langle a,a\rangle = a_1^2+a_2^2 = \|a\|^2$$

Wann schließen a und b einen rechten Winkel ein?



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Wenn $a\neq 0$, $b\neq 0$, so schließen a,b genau dann einen rechten Winkel ein, wenn $\langle a,b\rangle = 0$.

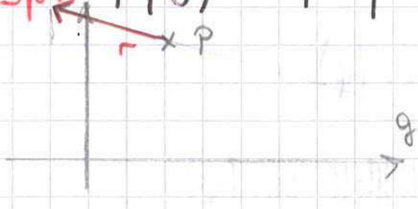
DEFINITION: Seien $a,b\in\mathbb{R}^2$. a und b sind aufeinander normal, wenn $\langle a,b\rangle = 0$

$\binom{a}{b}$ ist normal auf $\binom{-b}{a}$ und $\binom{b}{-a}$.

1.6. Geraden in der Ebene

a) Geraden, die durch Punkt und Richtungsvektor gegeben sind:

Bsp.: $P\binom{2}{3}$ $\quad r=\binom{-3}{1}$



$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid \text{es gilt } t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \{ x \in A \mid \text{Eigens.}(x) \}$$

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \{ f(x) \mid x \in A, \text{Eig}(x) \}$$

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Parameterdarstellung von g

Gilt $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \in g$?

$\rightarrow$ Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} I: 5 = -3t \\ II: t = -3 \end{array} \quad ↯ \right\} (1)$$

Da das Gleichungssystem (1) unlösbar ist, gilt $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \notin g$.

$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \in g$?

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

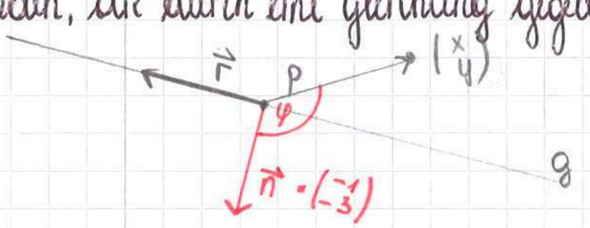
$$\left.\begin{array}{l} -6 = -3t \\ 2 = t \end{array} \right\} \mathbb{L} = \{2\}$$

Also gilt: $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \in g$

Begründung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Der Parameterwert $t = 2$ bezeugt also, dass $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf g liegt.

b) Geraden, die durch eine Gleichung gegeben sind:



$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P \text{ ist normal auf } \vec{n}} \right\}.$$

$$\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P \rangle = 0$$

$$= \langle \vec{n}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle - \langle \vec{n}, P \rangle = 0$$

$$= \langle \vec{n}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle - \langle \vec{n}, P \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot (a_i b_i)$$
$$= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$
$$= \lambda \cdot \langle a, b \rangle$$

(4) $\langle a, a \rangle \geq 0$

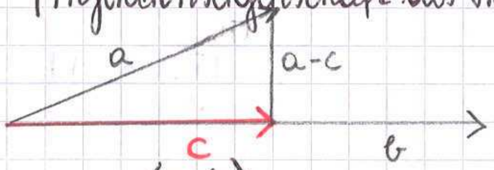
Beweis: $\langle a, a \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\rangle$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0$$
jeder Summand ist ≥ 0

(5) Wenn $\langle a, a \rangle = 0$, so gilt $a = 0$.

Beweis: Wenn $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$ ist, so gibt es $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_j \neq 0$.

Dann gilt: $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq a_j^2 > 0$. $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

SATZ: (Projektionseigenschaft des Skalarprodukts)



$$c = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} * b$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$. Dann ist $a - c$ normal auf b.

Beweis: $\langle a - c, b \rangle$
$$= \langle a, b \rangle - \langle c, b \rangle$$
$$= \langle a, b \rangle - \left\langle \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} * b, b \right\rangle$$
$$= \langle a, b \rangle - \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \cdot \langle b, b \rangle = 0$$

SATZ: Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(1) $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$

(Dabei ist $\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}$)

(2) $|\langle a, b \rangle| = \|a\| \cdot \|b\|$, gilt genau dann, wenn $b = 0$ oder a ein Vielfaches von b ist.

zu (1): in $\mathbb{R}^2$ heißt das:

$$\left|\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right| \leq \left\|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right\|$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle^2 \leq \left\|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right\|^2 \cdot \left\|\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right\|^2$$

$$(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2)$$

$$a_1^2 b_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 + a_2^2 \cdot b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 \cdot b_2^2 + a_2^2 \cdot b_2$$

$$2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \leq a_2^2 \cdot b_1^2 + a_1^2 \cdot b_2^2$$

$$0 \leq (a_2 b_1 - a_1 \cdot b_2)^2$$

Beweis: 1. Fall: $b = 0$:

Dann sagt die C.-S. Ungleichung $0 \leq 0$, und das stimmt.

2. Fall: $b \neq 0$:

Wir wissen, dass

$$\left\langle a - \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \cdot b,\ a - \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \cdot b \right\rangle \geq 0.$$

Also gilt: $\langle a,a\rangle - \left\langle \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \cdot b, a\right\rangle - \left\langle a, \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \cdot b\right\rangle +$

$$\left\langle \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \cdot b, \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \cdot b \right\rangle =$$

$$= \langle a,a\rangle - 2 \cdot \frac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} \langle a,b\rangle + \frac{\langle a,b\rangle^2}{\langle b,b\rangle^2} \cdot \langle a,b\rangle \geq$$

mä $\langle b,$

$$= \langle a,a\rangle \cdot \langle b,b\rangle - 2 \cdot \langle a,b\rangle^2 + \langle a,b\rangle^2 \geq 0$$

Also: $\langle a,a\rangle \cdot \langle b,b\rangle \geq \langle a,b\rangle^2$

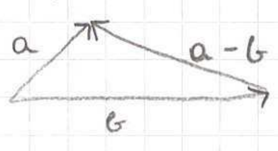
Folgl.: $\sqrt{\langle a,a\rangle} \cdot \sqrt{\langle b,b\rangle} \geq |\langle a,b\rangle|$

Somit: $\|a\| \cdot \|b\| \geq |\langle a,b\rangle|$ $\square$

SATZ: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Dann gilt für den eingeschlossenen Winkel φ:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle a,b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

Beweis:



$$\langle a-b, a-b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle b,b\rangle - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\varphi)$$

$$= \langle a,a\rangle - \langle a,b\rangle - \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle$$

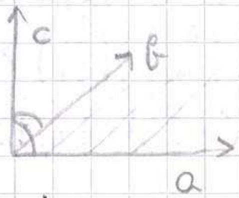
$$= \langle a,a\rangle + \langle b,b\rangle - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\| \|b\|} = \cos(\varphi)$$

Kreuzprodukt: ist eine Operation in $\mathbb{R}^3$

Geg.: $a, b \in \mathbb{R}^3$

Ges.: c mit $c \perp a,\ c \perp b,\ c \neq 0$



3 dimensional

DEFINITION: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

SATZ: Sei $a, b \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt $\langle a, a \times b \rangle = \langle b, a \times b \rangle = 0$

Beweis: $\langle a, a \times b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 =$

$\langle b, a \times b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right\rangle$

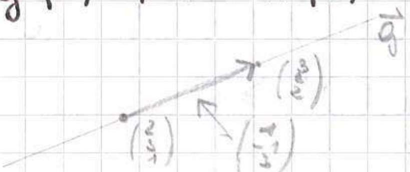
$= b_1 a_2 b_3 - b_1 a_3 b_2 + b_2 a_3 b_1 - b_2 a_1 b_3 + b_3 a_1 b_2 - b_3 a_2 b_1 = 0$ $\square$

1.7 Geraden und Ebenen im Raum

20.3.17

Parameterdarstellung einer Geraden:

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Parameterdarstellung einer Ebene:

Geg.: Ebene e mit $P \in e$, $Q \in e$, $R \in e$

Gesucht: Beschreibung der Punkte auf e.

$S = P + 1 \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$

$e: P + \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$

$e = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + \lambda \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ} \right\}$

Bsp.: $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 38 \end{pmatrix} \in e$?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-2 = 2\lambda + \mu$$
$$-3 = -\lambda - \mu$$
$$\underline{39 = -3\lambda + 3\mu}$$

$$\begin{array}{rrr|l}
-1 & -1 & -3 & \mathrm{I} \\
2 & 1 & -2 & \mathrm{II} \\
-3 & 3 & 39 & \mathrm{III} \\
\hline
0 & -1 & -8 & 2\cdot\mathrm{I} + \mathrm{II} = \mathrm{II}' \\
0 & 6 & 48 & (-3)\mathrm{I} + \mathrm{III} = \mathrm{III}' \\
\hline
0 & 0 & 0 & 6\cdot\mathrm{II}' + \mathrm{III}' = \mathrm{III}'
\end{array}$$

$\mu = 8$, $\quad -\lambda = -3 + \mu$

$-\lambda = 5$

$\lambda = -5$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + (-5) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Daher gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 38 \end{pmatrix} \in e$.

Implizite Darstellung einer Ebene:

Wie kann man die Punkte auf e „einfacher" charakterisieren?

X liegt auf der Ebene, wenn $\langle X - P, \vec{n} \rangle = 0$.

Wir brauchen noch einen Vektor $\vec{n}$, der normal auf $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ ist.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X \in e \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$-6x - 9y - z = -38$$

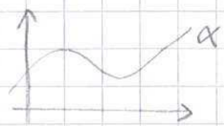
Somit kann man die Ebene auch so beschreiben:

- $i = (7, -5, 0)$

DEFINITION: α ist eine Funktion von A nach B

$\Leftrightarrow$ α ist eine Relation von A nach B, und α ist funktional

$\Leftrightarrow$ $\alpha \subseteq A \times B$,



$\forall a \in A \ \exists b \in B : (a, b) \in \alpha$

22.3.17

$\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 \in B : ((a, b_1) \in \alpha \text{ und } (a, b_2) \in \alpha) \Rightarrow b_1 = b_2$

$\Leftrightarrow \forall a\, A \ \exists!\, b \in B : (a, b) \in \alpha$

Was ist ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$?

Eine Funktion $v : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$.

$v = (v(1), v(2), v(3)) = (v_1, v_2, v_3)$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ ist eine 2×3-Matrix

$A = \begin{pmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) \end{pmatrix}$

$v = (v(1), v(2), v(3))$

$v : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$

$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$B(3,2) = 5$

$B(2,1) = 2$

$A : \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$

$A(1,1) = 1$ $\qquad$ $A(2,1) = 0$

$A(1,2) = 7$ $\qquad$ $A(2,2) = 6$

$A(1,3) = 2$ $\qquad$ $A(2,3) = -5$

2.2 Addition von Matrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 4} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 & 12 \\ 7 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}}_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 16 \\ 7 & 8 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Bei Addition von Matrizen brauchen die Matrizen das selbe Format, sonst ist die Summe nicht definiert.

DEFINITION: Seien $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (A hat m Zeilen und n Spalten), sei $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$. 	in Lineare $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots$

Die Summe $C := A + B$ ist genau dann definiert, wenn $m = k$ und $n = l$.
Dann ist C eine $m \times n$-Matrix, und die Einträge von C sind definiert durch $C(i, j) = A(i, j) + B(i, j)$ für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $j \in \{1, 2, \dots n\}$

2.3 Multiplikation einer Matrix mit einer reelen Zahl

$$17 * \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -8 \\ \pi & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 & -34 \\ 17 & -136 \\ 17 \cdot \pi & 391 \end{pmatrix}$$

DEFINITION: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Das Produkt $C := t * A$ ist eine $m \times n$-Matrix. Die Einträge von C sind gegeben durch $C(i, j) = t \cdot A(i, j)$

2.4 Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1 \quad 2} \\ 2 \quad 5 \quad 4 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\\7\end{matrix}} & \begin{matrix}9\\8\\1\end{matrix} & \begin{matrix}3\\5\\-4\end{matrix} \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \boxed{24} & 37 & 6 \\ 39 & 62 & 15 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad = \quad 3 \times 3$

2×3

Die Matrixmultiplikation ist nur definiert, wenn die beiden inneren Zahlen gleich sind.

$$\underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2 \times 4}{\begin{pmatrix} 7 & -1 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{3 \times 4}{\begin{pmatrix} 7 & -11 & 4 & -5 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 49 & -27 & 48 & -5 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{2 \times 4}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4 \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix}}$$

DEFINITION: Sei $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 	$k \, (A(i,1) \; A(i,2) \, .. \, A(i,l))$ l 	$m \, B(1, \dots$ $B(m$ n

Dann ist das Produkt $C = A \cdot B$ genau dann definiert wenn $l = m$. Das Produkt C ist dann eine $k \times n$-Matrix. Es gilt $C(i, j) = A(i, 1) \cdot B(1, j) + A(i, 2) \cdot B(2, j) + A(i, 3) \cdot \dots$ 	$m = l$

$$= \sum_{r=1}^{l} A(i, r) \cdot B(r, j) \quad \text{für } i = 1 \dots k$$
$$j = 1 \dots n$$

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

(SATZ: Sei $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Die Matrixmultiplikation ist also assoziativ.)

$\Rightarrow (A \cdot B) \cdot [i,j] = \sum_{r=1}^{n} A[i,r] \cdot B[r,j]$

27. März 17

2.5 Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation

SATZ: Seien $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, seien $A \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Beweis: $\underbrace{\underbrace{(A \cdot B)}_{k \times m} \cdot \underbrace{C}_{m \times n}}_{k \times n} =$ $\underbrace{\underbrace{A}_{k \times l} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{l \times n}}_{k \times n} =$

Wir zeigen, dass $(AB)C$ und $A(BC)$ die gleichen Einträge haben.

z.z. $\forall i \in \{1, \dots, k\} \forall j \in \{1, \dots, n\}: ((A \cdot B) \cdot C)[i,j] = (A \cdot (B \cdot C))[i,j]$

Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ und sei $j \in \{1, \dots, n\}$.

Wir berechnen die linke Seite:

$$((A \cdot B) \cdot C)[i,j]$$

$$= \sum_{r=1}^{m} (A \cdot B)[i,r] \cdot C[r,j] =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{l} A[i,s] \cdot B[s,r]\right) \cdot C[r,j] =$$

$$= \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{l} A[i,s] \cdot B[s,r] \cdot C[r,j]$$

Wir berechen die rechte Seite:

$$(A\cdot(B\cdot C))[i,j] =$$
$$\sum_{r=1}^{\ell} A[i,r]\cdot(B\cdot C)[r,j] =$$
$$\sum_{r=1}^{\ell} A[i,r]\cdot\left(\sum_{s=1}^{m} B[r,s]\cdot C[s,j]\right) =$$
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{m} A[i,r]\cdot B[r,s]\cdot C[s,j] =\\ &\sum_{s_1=1}^{\ell}\sum_{r_1=1}^{m} A[i,s_1]\cdot B[s_1,r_1]\cdot C[r_1,j] =\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}r&=s_1\\ s&=r_1\end{aligned}$$
$$\underline{\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{s_1=1}^{\ell} A[i,s_1]\cdot B[s_1,r_1]\cdot C[r_1,j]}$$

Also: Linke Seite = rechte Seite $\square$

Distributivgesetze: (rechts)

SATZ: Seien $k,\ell,m\in\mathbb{N}$, $A,B\in\mathbb{R}^{k\times\ell}$, $C\in\mathbb{R}^{\ell\times m}$. Dann gilt:

$$(A+B)\cdot C = (A\cdot C)+(B\cdot C)$$

Beweis: $\underbrace{\underbrace{(A+B)}_{k\times\ell}\cdot\underbrace{C}_{\ell\times m}}_{k\times m} =$ $\underbrace{\underbrace{(\underbrace{A}_{k\cdot\ell}\cdot\underbrace{C}_{\ell\times m})}_{k\times m}+\underbrace{(B\cdot C)}_{k\times m}}_{k\times m}$

Sei $i\in\{1,\dots,k\}$ und $j\in\{1,\dots,m\}$:

Wir berechnen den (i,j)-ten Eintrag der linken Seite:

$$(A+B)\cdot C\,[i,j] =$$
$$\sum_{r=1}^{\ell}(A+B)[i,r]\cdot C[r,j] =$$
$$\sum_{r=1}^{\ell}(A[i,r]+B[i,r])\cdot C[r,j] =$$
$$\underline{\sum_{r=1}^{\ell}(A[i,r]\cdot C[r,j]+B[i,r]\cdot C[r,j])}$$

2.7 Transponieren von Matrizen

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & \overset{A[1,3]}{-3} \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ \underset{A^T[3,1]}{-3} & 3 \end{pmatrix}$

DEFINITION: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $C := A^T$ eine $n \times m$-Matrix. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt

$$\underbrace{A^T[i,j]}_{C[i,j]} = A[j,i]$$

⇒ Transponieren einer Matrix

Es gilt (bei passenden Formaten):

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (wichtig wegen Formate)

29.03.17

2.8 Einheitsmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 \\ -5 & -9 & 8 & 5 \\ 3 & 10 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 \\ -5 & -9 & 8 & 5 \\ 3 & 10 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

DEFINITION: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die $n \times n$ Einheitsmatrix E_n ist definiert durch

$$E_n(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

SATZ: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt

$$E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$$

Beweis: Wir zeigen $\underbrace{\underbrace{E_m}_{m \times m} \cdot \underbrace{A}_{m \times n}}_{m \times n} = A$

Einträge: Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$(E_m \cdot A)[i,j] = \sum_{k=1}^{m} E_m[i,k] \cdot A[k,j]$$

$$= E_m[i,i] \cdot A[i,j] = 1 \cdot A[i,j]$$

Summanden für $k \neq i$ sind 0!

$$= A[i,j]$$

Also: $E_m \cdot A = A$

$A \cdot E_n = A$: „genauso"

2.9 Invertieren von Matrizen

Geg.: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$

Gesucht: $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Bedingung: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I}: 2a + 3c = 1 \\ \text{II}: 5a - 5c = 0 \end{array}\right\} 5\text{I} - 2\text{II}: 25c = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{III}: 2b + 3d = 0 \\ \text{IV}: 5b - 5d = 1 \end{array}\right\} 5\text{III} - 2\text{IV}: 25d = -2$$

$c = \frac{1}{5} \quad a = \frac{1}{5} \quad d = -\frac{2}{25} \quad b = \frac{3}{25}$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{25} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix}$$

Erfreulicher „Zufall":

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/25 \\ 1/5 & -2/25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2u - 4w = 1 \quad | \cdot 3$

$-3u + 6w = 0 \quad | \cdot 2$

$0u + 0w = 3$

Es gibt also kein $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass $A \cdot X = E_2$.

$\Rightarrow$ nicht invertierbar

$0 \cdot (IV') + II'$	0	0	2	2	(II'')
$0 \cdot (IV') + III'$	0	0	3	3	(III''')
$3 \cdot (II') - 2 \cdot (III')$	0	0	0	0	(III''')

II'' $2x_3 = 2$

$x_3 = 1$

IV' $x_2 = 5 - 2x_3$

$x_2 = 3$

I $x_1 = 16 - 5x_2 - 3x_3$

$x_1 = -2$

$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

VI Unterräume des $\mathbb{R}^n$

24.4.17

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

DEFINITION: Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

T ist ein <u>Unterraum</u> von $\mathbb{R}^n$:$\Leftrightarrow$

(1) T enthält zumindest ein Element.

$T \neq \emptyset$.

(2) für alle $t \in T$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda * t \in T$.

$\forall t \in T \; \forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda * t \in T$

(3) für alle $s, t \in T$ gilt $s + t \in T$.

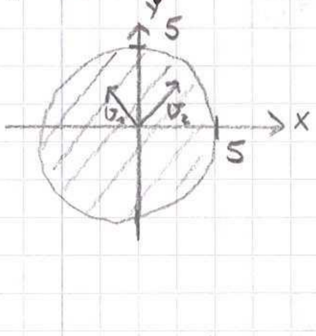
$\forall s, t \in T: s + t \in T$.

Beispiele:

erfüllt sind ...

Bsp.:	(1)	(2)	(3)
T_1	JA	NEIN	NEIN
T_2	JA	JA	JA
T_3	JA	NEIN	NEIN
T_4	JA	JA	JA

Bsp. 1: $T_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leq 25 \right\}$

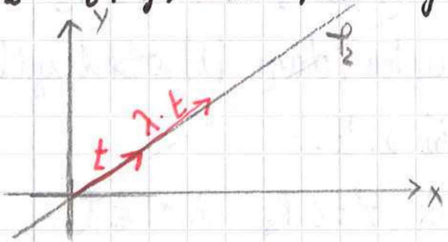


(1) z.B.: $(1|1) \in T_1$

(2) es gilt $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in T_1$, und $2 * \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \notin T_1$.

(3) $\left. \begin{array}{l} v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \in T_1 \\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in T_1 \end{array} \right\} v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \notin T_1$.

Bsp. 2: $T_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 2x - 3y = 0 \right\}$



(1) z.B.: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in T_2$

(2) Wir zeigen:

Z.z. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall t \in T_2 : \lambda * t \in T_2$

Sei (dazu) $\lambda \in \mathbb{R}$ und $t \in T_2$.

Z.z. $\lambda * t \in T_2$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $t = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Da $t \in T_2$ gilt $2a - 3b = 0$

Es gilt $\lambda * t = \lambda * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$

Wir überprüfen, ob $\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$ die Geradengleichung erfüllt.

Es gilt: $2 \cdot (\lambda a) - 3 \cdot (\lambda b)$

$= \lambda \cdot (2a - 3b)$

Da $2a - 3b = 0$, gilt auch $\lambda \cdot (2a - 3b) = 0$.

Insgesamt gilt also: $\lambda * t \in T_2$.

(3) Wir zeigen nun

$\forall s, t \in T_2 : s + t \in T_2$.

Seien $s, t \in T_2$

Z.z. $s + t \in T_2$.

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $s = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $t = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Es gilt: $s + t = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$

Wir überprüfen, ob $\begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$ in T_2 liegt:

$2 \cdot (a + c) - 3 \cdot (b + d)$

$= 2a + 2c - 3b - 3d$

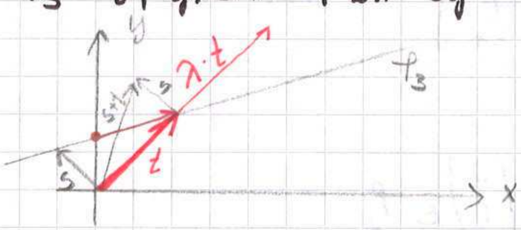
$= (2a - 3b) + (2c - 3d)$

Da $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in T_2$, gilt $2a - 3b = 0$. Da $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in T_2$, gilt $2c - 3d = 0$.

Insgesamt gilt $2a - 3b + 2c - 3d = 0$.

Also gilt $s + t \in \mathbb{R}^2$.

Bsp. 3: $T_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = -3 \right\}$



(1) z.B.: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T_3$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall t \in T_3 : \lambda * t \in T_3$.

Wir behaupten, dass (2) nicht gilt.

Dazu ist z.Z.:

$\neg \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall t \in T_3 : \lambda * t \in T_3$.

Das heißt: $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \exists t \in T_3 : \lambda * t \notin T_3$

Sei $\lambda := 2$, $t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann gilt $t \in T_3$, da $2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$

$\lambda * t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -3$

Da $-6 \neq -3$, gilt $\lambda * t \notin T_3$.

(3) Wir zeigen also:

$\exists s \in T\ \exists t \in T : s + t \notin T$.

$s := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

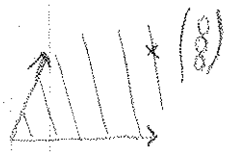
Da $2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$, gilt $s \in T$ und $t \in T$.

$s + t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Da $2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6 \neq -3$, gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin T$.

Also gilt (3) nicht.

Bsp. 4: $T_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists s, t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$



T_4 ist jene Ebene im $\mathbb{R}^3$, in der die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ liegen.

(1) Ja, da z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in T_4$ ist.

(2) $\forall t \in T_4\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda * t \in T_4$

Sei $t \in T_4$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Z.z.: $\lambda * t \in T_4$

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass $t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Da $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in T_4$, gibt es $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \sigma * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \tau * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\lambda * t = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda * \left(\sigma * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \tau * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \underbrace{(\lambda \cdot \sigma)}_{s'} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \underbrace{(\lambda \cdot \tau)}_{t'} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

s' und t' belegen nun, dass $\lambda * t \in T_4$ gilt. Denn es gilt:

$\lambda * t = s' * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t' * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, und somit erfüllt $\lambda * t$ die Eigenschaft.

(3) analog

DEFINITION: $U \subseteq \mathbb{R}^n$. 26.4.17

U ist ein <u>Unterraum</u> von $\mathbb{R}^n$ $:\Longleftrightarrow$

(1) Wegen $0 \in U$ ist U nicht die leere Menge

$U \neq 0$

(2) Sei $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $0 = \alpha \cdot (A \cdot u) = A \cdot (\alpha \cdot u)$, also

$\alpha \cdot u \in U$.

$\forall u \in \mathbb{R}^n \; \forall \alpha \in \mathbb{R} : u \in U \Rightarrow \alpha \cdot u \in U$

(3) Seien $u, v \in U$. Dann gilt $A \cdot (u + v) = Au + Av = 0$, d. h. $u + v \in U$

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : (u \in U \wedge v \in U) \Rightarrow u + v \in U$

Bsp.: Jede der folgenderen Mengen ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

(1) $\left\{ \alpha * \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ = Gerade

(2) $\left\{ \alpha * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ = Ebene

$\Rightarrow$ beschränkte Figuren, wie Kreis, sind nicht möglich

(3) $\mathbb{R}^3$

(4) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (Bsp.: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{2 \times 3 \text{ Matrix}}$)

$\underline{U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0 \}}$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right\} \mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

SATZ: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Sei $U = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0 \}$

Dann ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis: (1) Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, gilt $U \neq \emptyset$

(2) Sei $u \in \mathbb{R}^n$. Und sei $\alpha \in \mathbb{R}$

Wir nehmen an, dass $u \in U$ (BEWEIS einer Implikation)

Z.z.: $\alpha * u \in U$

Wir überprüfen dazu, ob $A \cdot (\alpha * u) = 0$

$A \cdot (\alpha * u) = \alpha * (A \cdot u)$

$A \cdot (t * B) = t * (A \cdot B)$

Da $u \in U$, gilt $A \cdot u = 0$. Somit gilt auch $\alpha * (A \cdot u) = 0$

Insgesamt gilt also $A \cdot (\alpha * u) = 0$, und somit auch $\alpha * u \in U$

(3) Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass $u \in U$ und $v \in U$.

Z.z.: $u + v \in U$

Wir überprüfen dazu ob $A \cdot (u + v) = 0$.

Es gilt: $A \cdot (u + v) = A \cdot u + A \cdot v$

Da $u \in U$, gilt $A \cdot u = 0$. Da $v \in U$, gilt $A \cdot v = 0$. Somit gilt

$A \cdot u + A \cdot v = 0 + 0 = 0$

Insgesamt gilt daher $A \cdot (u + v) = 0$, und somit gilt $u + v \in U$.

6.2 Die lineare Hülle von Vektoren

Die lineare Hülle der Vektoren v und w ist die Menge aller Linearkombinationen von v und w.

$$\mathcal{L}(v, w) = \{\alpha * v + \beta * w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : z = \alpha * v + \beta * w\}$$

(Eine Hülle ist eine Ebene, die aufgespannt wird, außer v und w liegen auf einer Linie dann ist es eine Gerade)

DEFINITION: Sei $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m) = \{\lambda_1 * v_1 + \lambda_2 * v_2 + \dots + \lambda_m * v_m \mid \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}\}$$

heißt die lineare Hülle von $v_1, \dots, v_m$.

oder $\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R} \right\}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid$ es gibt $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$, sodass $x = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m \}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i \right\}$

Bsp.: Gilt $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$?

$\lambda_1 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$I: 2\lambda_1 + 7 \cdot \lambda_2 = 6$

$II: 1\lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 0$

$III: -3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 2$

$I': 0\lambda_1 + 3\lambda_2 = 6 \quad -2 \cdot II + I$

$III': 0\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \quad 3II + III$

$III'': 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0 \quad (-\frac{1}{3}) \cdot I' + III'$

also $3\lambda_2 = 6$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = -2\lambda_2 = -4$

Es gilt also: $-4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Also liegt $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, es gilt also $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$

Bsp.: Gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$?

$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$I: -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 1$

$II: 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = 3$

$II': 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 5 \quad 2I + II$

Es gibt keine Lösung!

Es gilt also: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

Bsp.: $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix}\right)$? 3.5.17

Dazu äquivalent ist die Frage: Gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \; ?$$

Solche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ gibt es genau dann, wenn das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\1 & -1 & 4\\2 & -2 & 8\end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ besitzt.

Allgemeiner: Sei $w \in \mathbb{R}^n$, seien $v_1, v_2, v_3, \dots v_m \in \mathbb{R}^n$, sei $B = (v_1, v_2, \dots v_m)$ die $n \times m$-Matrix, in deren Spalten $v_1, \dots v_m$ stehen. Dann gilt $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ genau dann, wenn das Gleichungssystem $B \cdot x = w$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^m$ hat.

SATZ: Seien $m, n \in \mathbb{N}$; $\overbrace{v_1, \dots v_m}^{\text{Vektoren}} \in \mathbb{R}^n$, sei $V = \mathcal{L}(v_1, \dots v_m)$. Dann ist V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Da $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 v_m \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ gilt $V \neq \emptyset$.

Als nächstes zeigen wir für alle $v \in \mathbb{R}^2$ ($\forall v \in \mathbb{R}^n$) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $v \in V \Rightarrow \alpha * v \in V$.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $v \in V$.

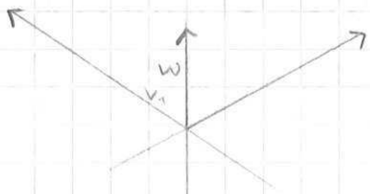
= Menge aller linearen Kombinationen

Z.z.: $\alpha * v \in V$. Da $v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$, gibt es $\alpha_1, \dots \alpha_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m v_m.$$

Also gilt $\alpha * v = \alpha * (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m \cdot v_m) = \underbrace{(\alpha \alpha_1)}_{\beta_1} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{(\alpha \alpha_m)}_{\beta_m} \cdot v_m$.

Die Zahlen $\beta_1, \dots, \beta_m$ belegen, dass $\alpha * v$ in der linearen Hülle von $v_1, \dots, v_m$, also in V liegt.



$v_1 \in \mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}(v_1) = 2$
$w \in \mathcal{L}(v_1)$ es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda * v_1 = w$

Nun zeigen wir $\forall v, w \in \mathbb{R}^n \, (v \in V \wedge w \in V) \Rightarrow v + w \in V$.

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass $v \in V \wedge w \in V$.

z.z. $v + w \in V$. Da $v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$, gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$v = \lambda_1 * w_1 + \dots + \lambda_m * w_m.$$

Da $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ gibt es $\mu_1, \dots \mu_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$w = \mu_1 * v_1 + \dots + \mu_m * v_m.$$

Also gilt: $$v + w = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m + \mu_1 \cdot v_1 + \dots \mu_m \cdot v_m = \underbrace{(\lambda_1 + \mu_1)}_{\gamma_1} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_m + \mu_m)}_{\gamma_m} \cdot v_m$$

Die Zahlen $\gamma_1, \dots \gamma_m$, dass $v + w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ gilt.

SATZ: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $v_1, v_2, \dots v_m \in \mathbb{R}^n$.
Sei W ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $v_1 \in W, \dots, v_m \in W$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_m) \subseteq W.$$

sobald man 2 Vektoren im Unterraum hat, muss man auch alle Kombinationen haben

Man kann $A \subseteq B$ beweisen, indem man $\forall x \in A : x \in B$ beweist.

Beweis: Sei $x \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$.

Z.z. $x \in W$

Da $x \in \mathcal{L}(v_1, v_2 \dots, v_m)$, gibt es $\psi_1, \dots \psi_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \psi_1 * \underbrace{v_1}_{\in W \text{ lt. Voraussetzung}} + \dots + \psi_m * \underbrace{v_m}_{\in W}$$

Da $v_1, \dots, v_m \in W$, gilt wegen der zweiten Unterraumeigenschaft auch, dass
$\psi_1 * v_1 \in W, \psi_2 * v_2 \in W, \dots, \psi_m * v_m \in W$.

Wegen der dritten Unterraumeigenschaft gilt: $\overbrace{\sum_{i=1}^{m} \psi_i * v_i}^{=x} \in W$, also $x \in W$

Daraus ergibt sich folgende Beschreibung von $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$.

$$\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m) = \bigcap \{W : W \subseteq \mathbb{R}^n, \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq W, W \text{ ist Unterraum d. } \mathbb{R}^n$$

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Der Zeilenraum von A ist ein Unterraum von A ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$:

$Z(A) = \mathcal{L}((1,2,-3,1),(2,0,1,-2),(3,2,-2,-1))$ → Könnte man weglassen, da dieser Vektor, die Summe der anderen beiden ist

Der Spaltenraum von A ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$:

$S(A) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)$

Der Nullraum von A ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$:

$N(A) = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; A \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

6.3 Lineare Unabhängigkeit

DEFINITION: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$.

Die Folge $(v_1, \dots, v_m)$ ist lineare unabhängig, wenn für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 * v_1 + \dots + \lambda_m * v_m = 0$ gilt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m = 0$

Bsp.: Ist folgende Folge $\left(\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\10\\-10\end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig?

$\lambda_1 * \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 * \begin{pmatrix}3\\10\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

I:	1	0	3	0	
II:	4	1	10	0	
III:	-2	2	-10	0	
(-4)I + II:	0	1	-2	0	II'
2I + III:	0	2	-4	0	III'
(-2)II' + III'	0	0	0	0	

$\lambda_3 = t$

$\lambda_2 = 2t$

$\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = -3 \cdot \lambda_3 = -3t$

Es gilt: $(-3) \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}3\\10\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\mathcal{L} = \left\{t \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$

Bei dieser linearen Kombination wird nicht jeder Vektor 0 mal genommen, sie ergibt aber den Nullvektor. Diese lineare Kombination belegt also, dass die Folge $\left(\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\10\\-10\end{pmatrix}\right)$ NICHT linear unabhängig ist.

Bsp.: Ist $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig?

Es gilt $7 * \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, daher ist $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)$ nicht linear unabhängig.

Es dürfen ein Paar 0 werden, aber nicht alle

Bsp.: Ist $((3,2),(1,3))$ eine lineare unabhängige Folge von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$?

$$\lambda_1 * \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}: &\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\
\mathrm{II}: &\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\
\hline
(-2)\mathrm{I} + 3\mathrm{II}: &\ 0\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Also ist $\lambda_2 = 0$, daraus folgt, dass auch $\lambda_1 = 0$

Also ist $\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig

Bsp.: $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig?

$$\lambda_1 * \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 * \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
\mathrm{I}: & 1 & 0 & 3 & 0 \\
\mathrm{II}: & 2 & 1 & -5 & 0 \\
\hline
(-2)\mathrm{I} + \mathrm{II}: & 0 & 1 & -11 & 0
\end{array}$$

$$\lambda_3 = t \qquad \lambda_2 = 11t \qquad \lambda_1 = -3t$$

$$-3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Also ist die Folge nicht linear unabhängig

$v_1, \dots, v_m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}: \lambda_1 * v_1 + \dots + \lambda_m * v_m = 0$
$\Rightarrow (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \wedge \dots \wedge \lambda_m = 0)$

Bsp.: $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}\right)$

Da $0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix} = 0$, sind sie nicht linear unabhängig, also linear abhängig

$v_1, \dots, v_m$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$, sodass
$\lambda_1 * v_1 + \dots + \lambda_m * v_m = 0$ und mindst.
ein λ_i ungleich 0 ist

PROPOSITION: Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ so, dass $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$. Dann ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig.

Beweis: Wir wissen $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$
Zu zeigen: (v_1, v_2, v_3) linear abhängig. Da $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$, gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sodass $v_3 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$.

Also: $0 = \underbrace{\lambda_1}_{\text{evt. } 0} \cdot v_1 + \underbrace{\lambda_2}_{\text{evt. } 0} \cdot v_2 + \underbrace{(-1)}_{\text{nicht } 0} * v_3$ (*) Da $-1 \neq 0$, belegt (*), dass (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist

---

VERMUTUNG 1: Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist. Dann gilt $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$.

Beweis: Wir wissen, dass (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist. Also gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$, die nicht alle 0 sind, sodass $0 = \alpha_1 * v_1 + \alpha_2 * v_2 + \alpha_3 * v_3$

$v_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \cdot v_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right) \cdot v_2$

Somit gilt $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$

$(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}_{\text{linear abhängig}}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ Gegenbsp. ↯ Beweis stimmt nicht.

1. Fall: $\alpha_3 \neq 0$
2. Fall: $\alpha_3 = 0$ $\rightarrow 0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0 v_3$

In diesem Fall gelingt es nicht, $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$ zu zeigen

ODER zu Vermutung 1: oder $v_1 \in \mathcal{L}(v_2, v_3)$
oder $v_2 \in \mathcal{L}(v_1, v_3)$

Beweis: Da (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist, gibt es $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$ sodass $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

1. Fall: $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot v_3$

Also $v_1 \in \mathcal{L}(v_2, v_3)$

2. Fall: $v_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot v_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cdot v_3$

Also $v_2 \in \mathcal{L}(v_1, v_3)$

3. Fall: $\alpha_3 \neq 0$

Dann gilt $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$

Einer dieser Fälle muss zutreffen.

8. Mai 17

Bsp.: Ist $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}\right)$ linear abhängig?

$$\lambda_1 * \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 * \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 8\\2 & 2 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

SATZ: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, seien $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$, und sei $\overline{B} = (b_1, \dots b_m)$ die $n \times m$-Matrix mit $b_1, \dots, b_m$ als Spaltenvektoren.
Dann ist $(b_1, \dots, b_m)$ genau dann linear abhängig, wenn das Gleichungssystem $\overline{B} \cdot x = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ hat.

Bemerkung: $\begin{pmatrix}b_1 & \dots & b_m\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v\end{pmatrix}$

$$v = x_1 * b_1 + \dots + x_m * b_m$$

Zurück zum Beispiel:

1	-5	8	0	
2	2	0	0	
	12	-16	0	$(-2) \cdot I + II$

$x_3 := t$

$12 x_2 = 16t \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3} t$

$x_1 = -\frac{4}{3} t$

z.B.: $t := 3$

$(-4) * \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 4 * \begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Dann ist $(b_1, \dots, b_m)$ genau dann linear unabhängig, wenn das Gleichungssystem $\overline{B} \cdot x = 0$ nur die Lösung $x = 0$ hat.

6.4 Basis eines Vektorraums

DEFINITION: Sei T ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Die Folge $B = (b_1, \dots, b_m)$ ist Basis von T $:\Longleftrightarrow$

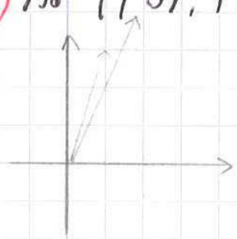
(1) $(b_1, \dots, b_m)$ ist linear unabhängig

(2) $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_m) = T$.

Beispiele:

(1) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(2) Ist $\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$?



Wir überprüfen, ob $\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig ist:

linear abhängig, wenn sie in die selbe Richtung zeigen.

I:	1	2	0
II:	3	5	0
(-3)I+II:	0	-1	0

Das Gleichungssystem hat nur die Lösung $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, also ist die Folge linear unabhängig.

Wir überprüfen nun, ob $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$.

"$\subseteq$": Sei $x \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $x = \alpha * \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. Klarerweise gilt dann $x \in \mathbb{R}^2$.

"$\supseteq$": Sei $x \in \mathbb{R}^2$

Z.z. ist, dass $x \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)$.

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. Wir suchen nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, sodass $\alpha * \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

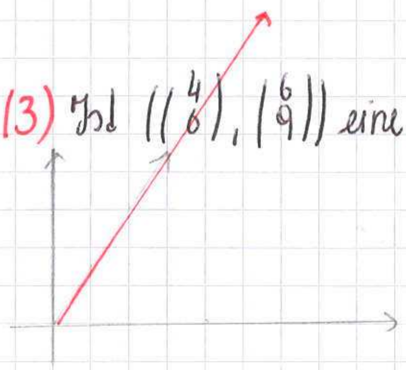
$$\begin{array}{lll} \text{I}: 1 & 2 & x_1 \\ \text{II}: 3 & 5 & x_2 \\ \hline 0 & -1 & -3x_1 + x_2 \quad \text{II}' = (-3)\cdot \text{I} + \text{II} \end{array}$$

$$-\beta = -3x_1 + x_2 \qquad\qquad \alpha = x_1 - 2\beta$$
$$= 3x_1 - x_2 \qquad\qquad = x_1 - 2\cdot(3x_1 - x_2)$$
$$= x_1 - 6x_1 + 2x_2$$
$$= -5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (-5x_1 + 2x_2) * \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x_1 - x_2) * \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

denn: rechte Seite: $\begin{pmatrix} -5x_1 + 2x_2 + 6x_1 - 2x_2 \\ -15x_1 + 6x_2 + 15x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(3) Ist $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$?



Wir überprüfen, ob $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. z.z.: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$.

$$\alpha * \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta * \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} 4 & 6 & x_1 & \text{I} \\ 6 & 9 & x_2 & \text{II} \\ \hline 0 & 0 & 3x_1 - 2x_2 & 3\cdot\text{I} - 2\cdot\text{II} = \text{II}' \end{array}$$

Sei nun z.B. $x_1 = 7$ und $x_2 = 8$. Dann erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll|l} \text{I} & 4 & 6 & 7 \\ \text{II}' & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung, also gil
$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \notin \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$.

Somit gilt $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$.

(4) Ist $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

$\Rightarrow$ Nein, nicht linear unabhängig, da

$$0 * \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5 * \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 0 * \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

(5) Ist $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

Die Folge ist linear unabhängig.

Es gilt $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$

$$\alpha * \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ \hline 0 & -3 \end{array}$$

So ein α gibt es nicht, also gilt $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$.
Somit gilt $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$. $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ ist daher keine Basis des $\mathbb{R}^2$.

(6) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

Sei $U = \{x \mid A \cdot x = 0\}$.

Die Elemente von U sind also die Lösungen von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
U ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$. Finden Sie eine Basis von U.

$$\begin{array}{lccccc|l}
\mathrm{I}: & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & \\
\mathrm{II}: & 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & \\
\mathrm{III}: & 2 & 3 & 8 & -5 & 0 & \\
\hline
\mathrm{II}': & 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & \\
\mathrm{III}': & 0 & 3 & 12 & -21 & 0 & (-2)\cdot \mathrm{I} + \mathrm{III} \\
\hline
\mathrm{II}'': & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-3)\cdot \mathrm{II}' + \mathrm{III}'
\end{array}$$

$x_3 := s \qquad x_4 := t$

$x_2 = -4s + 7t$

$x_1 = 2s - 3t$

$$\mathcal{L} = \left\{ s * \begin{pmatrix}2\\-4\\1\\0\end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix}-3\\7\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}2\\-4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\7\\0\\1\end{pmatrix}\right) = U$$

Die Vektoren, die aus de Gaus'schen Logarithmus herauskommen, sind SICHER linear unabhängig

Da $\left(\begin{pmatrix}+2\\-4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\7\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig ist, ist $\left(\begin{pmatrix}2\\-4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\7\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von U.

(7) Sei $V = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 0 \right\}$

Gleichung = 0

=> homogenes Gl

(1) Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des $\mathbb{R}^5$ ist.

(2) Finden Sie eine Basis von V.

---

(1) Für $A = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ ist V genau die Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$. Also ist V ein Unterraum des $\mathbb{R}^5$.

I: 1 1 1 1 1 0

$x_5 := \lambda_1$

$x_4 := \lambda_2$

$x_3 := \lambda_3$

$x_2 := \lambda_4$

$x_1 := -\lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1$

$$\mathcal{L} := \left\{ \lambda_1 * \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 * \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 * \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 * \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

6.4 Bestimmen der Basis eines Unterraums

10.5.17

Bestimme eine Basis von: $V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-33\\17\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}85\\-44\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-19\\10\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

V ist der Zeilenraum der Matrix A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ -33 & 17 & 1 & -1 \\ 85 & -44 & -3 & 2 \\ -19 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} = b_1 \\ = b_2 \\ = b_3 \\ = b_4 \end{array}$$

0	14	28	38	$33b_1 - 5b_2$	b_2'
0	7	14	19	$17b_1 + 3b_3$	b_3'
0	-7	-14	-19	$-19b_1 + 5b_4$	b_4'

Es gilt nun

$$\mathcal{L}(b_1, b_2, b_3, b_4) = \mathcal{L}(b_1, b_2', b_3', b_4')$$

Wir behaupten also

$$\mathcal{L}(b_1, b_2, b_3, b_4) = \mathcal{L}(b_1, 33b_1 - 5b_2, 17b_1 + b_3, -19b_1 + 5b_4)$$

"$\subseteq$": Wir zeigen als erstes:

$\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subseteq$ rechte Seite

$b_1 = 1 * b_1 + 0 * b_2' + 0 * b_3' + 0 * b_4' \in$ rechte Seite

$b_2 = ((-33) * b_1 + 1 * (33 b_1 - 5 b_2)) \cdot (-\frac{1}{5})$

$= \frac{33}{5} * b_1 - \frac{1}{5} * (33 b_1 - 5 b_2)$

$= \frac{33}{5} * b_1 - \frac{1}{5} * b_2' \in \mathcal{L}(b_1, b_2', b_3', b_4')$

$b_3 = (-17) * b_1 + 1 * (17 b_1 + b_3)$

$= -17 b_1 + b_3' \in \mathcal{L}(b_1, b_2', b_3', b_4')$

$b_4 = \frac{19}{5} b_1 + \frac{1}{5} * (-19 b_1 + 5 b_4) \in \mathcal{L}(b_1, b_2', b_3', b_4')$

Da die rechte Seite ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist, und da $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subseteq$ rechten Seite ist, gilt

$\mathcal{L}(b_1, b_2, b_3, b_4) \subseteq \mathcal{L}(b_1, b_2', b_3', b_4')$

"$\supseteq$" Es gilt:

$b_2' = 33 b_1 - 5 b_2 \in \mathcal{L}(b_1, b_2, b_3, b_4)$.

b_1, b_2', b_3', b_4' liegen also (offensichtlich) in $\mathcal{L}(b_1, b_2, b_3, b_4)$, also gilt

$\mathcal{L}(b_1, b_2', b_3', b_4') \subseteq \mathcal{L}(b_1, b_2, b_3, b_4)$

$$\begin{array}{cccc|l}
0 & 14 & 28 & 38 & b_2' \\
0 & 7 & 14 & 19 & b_3' \\
0 & -7 & -14 & -19 & b_4' \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & b_3'' = -\frac{1}{2} b_2' + b_3' \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_4'' = \frac{1}{2} b_2' + b_4'
\end{array}$$

Die Matrix $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & 28 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat also den gleichen Zeilenraum wie A.

Der Zeilenraum von B hat die Basis $C = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 28 \\ 38 \end{pmatrix} \right)$. C ist damit auch eine Basis für den Zeilenraum von A.

Bsp.: Bestimmen Sie eine Basis von

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-5\\8\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\6\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-8\\6\\0\\-5\end{pmatrix}\right).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \qquad \cdot(-1),\ (-5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 4 & -2 \\ 0 & 17 & -34 & -10 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \qquad \cdot 5 \cdot (-17)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -29 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 58 \\ 16 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit $\left(\begin{pmatrix}1\\-5\\8\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-16\\8\end{pmatrix}\right)$ eine Basis.

6.5 Die Zeilenstaffelnormalform

wird ausgelassen.

6.6. Nullraum

DEFINITION: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Dann ist $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$ der Nullraum von A.

DEFINITION: Sei $n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Wir definieren $M^{\wedge} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall m \in M: \langle m, v\rangle = 0\}$.

Oft schreibt man für $M^{\wedge}$ auch $M^{\perp}$ und bezeichnungsweise $M^{\perp}$ als „M orthogonal".

SATZ: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Dann gilt: $N(A) = (Z(A))^\perp$.

$Z(A)$ = Zeilenraum von A

Beweis:

$$A = \begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ \cdots \\ — z_n — \end{pmatrix}.$$

Sei nun $x \in N(A)$. Z.z. $x \in (Z(A))^\perp$. Zu zeigen ist also:

$\forall y \in Z(A): \langle y, x \rangle = 0$.

Sei dazu $y \in Z(A)$. $Z(A) = \mathcal{L}(z_1, \ldots, z_m)$, also gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$,
sodass $y = \lambda_1 * z_1 + \ldots + \lambda_m * z_m$.

Wir rechnen

$$\langle y, x \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i * z_i , x \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle z_i , x \rangle$$

Wir wissen $x \in N(A)$, also $\begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ \cdots \\ — z_n — \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | \\ x \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\langle z_1, x \rangle}{\boxed{0}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \underset{\langle z_n, x \rangle}{\boxed{0}} \end{pmatrix}$

Also $\forall i \quad \langle z_i, x \rangle = 0$

Somit gilt $\langle y, x \rangle = 0$. Somit gilt $x \in (Z(A))^\perp$.

Wir zeigen nun $(Z(A))^\perp \subseteq N(A)$.

Sei $x \in (Z(A))^\perp$. Z.z. $x \in N(A)$.

Wir wollen also zeigen, dass $A \cdot x = 0$.
d.h. wir wollen zeigen, dass $\begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ \cdots \\ — z_n — \end{pmatrix} \cdot x = 0$.

Dazu rechnen wir

$$\begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ \cdots \\ — z_n — \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | \\ x \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle z_1, x \rangle \\ \langle z_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle z_n, x \rangle \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass $x \in (Z(A))^\perp$.

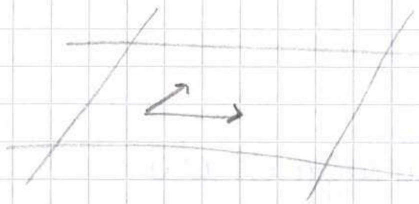
Da $z_1 \in Z(A)$, gilt also $\langle z_1, x \rangle = 0$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt: $\langle z_i, x \rangle = 0$.

Also gilt $A \cdot x = 0$. Somit gilt $x \in N(A)$.

6.7 Dimensionen eines Unterraums

Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann haben alle Basen von T gleich viele Elemente.

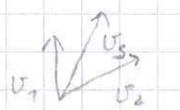


$$T = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}\right)$$

Die Anzahl der Elemente einer Basis heißt Dimension von T.

LEMMA: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei V ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, und seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m) = V$.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ und sei $w := \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m$.
Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ so, dass $\lambda_j \neq 0$.
Dann gilt: $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_m) = V$.

Bsp.: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$



$V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ (eine Ebene)

$$w = 1 \cdot v_1 + 0 v_2 + 3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\11\end{pmatrix}$$

Das Lemma behauptet nun, dass folgende Menge ebenfalls $= V$ sind.

a) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$

b) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$ NEIN, davon behauptet das Lemma nichts $\lambda_2 = 0$ ↯

c) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\11\end{pmatrix}\right)$

Bsp.: $V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right)$

$$w = 0 * \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 5 * \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\20\end{pmatrix}$$

Das Lemma besagt nun, dass $V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\20\end{pmatrix}\right)$.
Sonst wäre es in diesem Fall nur noch eine Gerade.

Beweis des Lemmas:

„$\supseteq$": Sei $x \in \mathcal{L}(v_1, v_2 \dots v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_m)$. Z.z. $x \in V$

Da $x \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_m)$, gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1} + \alpha_j \, w + \alpha_{j+1} \cdot v_{j+1} + \dots + \alpha_m \cdot v_m .$$

Es gilt

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i\right) + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_j \lambda_1) \cdot v_1 + (\alpha_2 + \alpha_j \lambda_2) \cdot v_2 + \dots + \alpha_j \cdot \lambda_j \cdot v_j + \dots + (\alpha_m \cdot \alpha_j \lambda_m) \cdot v_m$$

$$\in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$$

15. Mai

„$\subseteq$": Sei $x \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_j, \dots, v_m)$. Z.z. $x \in \mathcal{L}(v_1, \dots, w, \dots, v_m)$

Da $x \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$ gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

Wir versuchen nun, x in der Form

$$x = \beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_j w_j + \beta_{j+1} \cdot v_{j+1} + \dots + \beta_m v_m$$

zu schreiben.

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \beta_i \cdot v_1 + \beta_j \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$$

$$\begin{aligned} = &(\beta_1 + \beta_j \cdot \lambda_1) \cdot v_1 + \\ &(\beta_2 + \beta_j \cdot \lambda_2) \cdot v_2 + \\ &\dots \\ &(\beta_{j-1} + \beta_j \cdot \lambda_{j-1}) \cdot v_{j-1} + \\ &\qquad \beta_j \cdot \lambda_j \cdot v_j + \\ &\dots \\ &(\beta_m + \beta_j \cdot \lambda_m) \cdot v_m . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung stimmt zum Beispiel, wenn

$$\beta_j \lambda_j = \alpha_j$$

und für $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{j\}$ gilt $\beta_i + \beta_j \lambda_i = \alpha_i$

Solche β's finden wir durch

$\lambda_j \neq 0$

$$\beta_j = \alpha_j / \lambda_j$$

$$\beta_i = \alpha_i - \frac{\alpha_j}{\lambda_j} \cdot \lambda_i \quad \text{für } i \neq j$$

Wir sehen nun:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \beta_i \cdot v_i + \beta_j \cdot w$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \left(\alpha_i - \frac{\alpha_j}{\lambda_j} \cdot \lambda_i\right) \cdot v_i + \frac{\alpha_j}{\lambda_j}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_j \cdot v_i\right)$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \alpha_i \cdot v_i - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \frac{\alpha_j}{\lambda_j} \cdot \lambda_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_j \cdot \lambda_i}{\lambda_j} \cdot v_i$$

kürzt sich alles bis auf j weg

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} \alpha_i \cdot v_i + \frac{\alpha_j}{\lambda_j} \cdot \lambda_j \cdot v_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v_i = x$$

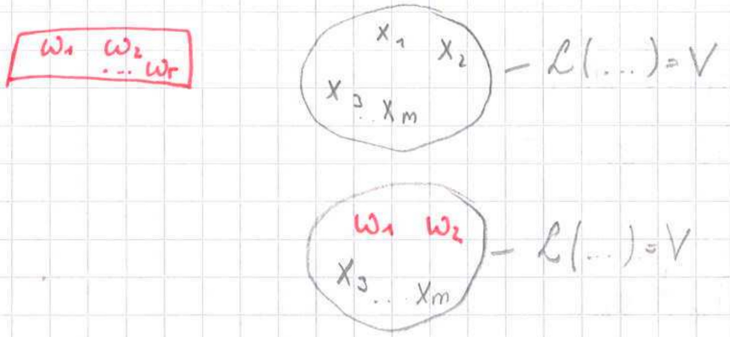
SATZ: (Austauschsatz von Steinitz)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und seien $x_1, x_2, \dots, x_m \in V$ so, dass $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_m) = V$.

Sei $r \in \mathbb{N}$, und sei $(w_1, \dots, w_r)$ eine linear unabhängige Folge von Elementen aus V.

Dann gibt es für alle $i \in \{0, 1, \dots, \min(r, m)\}$ eine injektive Abbildung $\pi : \{i+1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$, sodass

$V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_i, x_{\pi(i+1)}, \dots, x_{\pi(m)})$.



Wir ersetzen die Vektoren mit so vielen w's wie möglich und versuchen, dass die lineare Hülle gleich bleibt.

Beweis: (Überlegungen)

Für $i = 0$ muss π also so sein, dass

$V = \mathcal{L}(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(m)})$

Hier leistet $\pi = id_{\{1, \dots, m\}}$ das Gewicht.

Für $i=1$ muss π so sein, dass $V = \mathcal{L}(w_1, \underbrace{x_{\pi(2)}, x_{\pi(3)} \dots, x_{\pi(m)}}_{m-1 \text{ von } x_1, \dots, x_m})$.

Da $w_1 \in \mathcal{L}(x_1, \dots, x_m)$, gibt es
$\gamma_1 \dots \gamma_m \in \mathbb{R}$ mit $w_1 = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i$

Da $(w_1, \dots, w_m)$ linear unabhängig ist, gibt es $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $\gamma_k \neq 0$.
$\pi(k) = 1$; $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 3$; $\dots$, $\pi(k-1) = k-1$, $\pi(m) = m$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_m) \\ \mathcal{L}(x_1 \quad x_2 \quad w_1 \quad x_4 \quad \dots \quad x_m) \\ \mathcal{L}(x_1 \quad x_2 \quad w_1 \quad x_4 \quad w_2 \dots \quad x_m) \\ \mathcal{L}(x_1 \quad w_3 \quad w_1 \quad x_4 \quad w_2 \dots \quad x_m) \end{array}\right\} = V$$

Wir schmuggeln nach und nach alle w ein und werfen dafür ein x raus

Bernoulli Ungleichung: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ : (1+x)^n \geq 1 + nx$

dass „$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$" zeigt an, dass man nach vollständiger Induktion beweisen kann.

Einen Induktionsbeweis für $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ zu machen, heißt, an Stelle von $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ folgende beiden Aussagen zu zeigen:

(1) $A(1)$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Beweis: Induktion nach n:

[Die Aussage A_i findet man in
$\forall i \in \mathbb{N}_0 : i \leq \min(r, m)^* \Rightarrow$
$\underbrace{\exists \pi : \dots \quad)}_{A(i)}$]

* $\min(r, m)$ = das kleinere der beiden Zahlen r, m.

<u>Induktionsanfang</u>: Sei $i = 0$.

Wir wählen $\pi = id_{\{1, \dots, m\}}$.

Dann gilt

$$\mathcal{L}(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(m)}) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_m) = V.$$

Induktionsschritt: Sei nun $i \geq 1$.

Wir nehmen an, dass es π gibt, sodass

$$V = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_{i-1}, x_{\pi(i)}, \ldots, x_{\pi(m)})$$

Wir wollen nun $\sigma: \{i+1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ finden, sodass

$$V = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, x_{\sigma(i+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

Da $w_i \in \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_{i-1}, x_{\pi(i)}, \ldots, x_{\pi(m)})$, gibt es

$\lambda_i, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, sodass

$$w_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \cdot w_j + \sum_{j=i}^{m} \lambda_j \cdot x_{\pi(j)}.$$

Wenn $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_m$ alle $= 0$ sind, so gilt

$$w_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \cdot w_j$$

$$\lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_{i-1} w_{i-1} + (-1) \cdot w_i = 0$$

Wir nehmen an, dass $\pi: \{i, i+1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ so ist, dass

$V = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_{i-1}, x_{\pi(i)}, \ldots, x_{\pi(m)})$.

17.5.17

Ziel: Wir finden $\sigma: \{i+1, \ldots, m\}$, sodass

$$\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, x_{\sigma(i+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = V$$

Wir wollen eines der $x_{\pi(j)}$ durch w_i ersetzen.

Da $w_i \in \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_{i-1}, x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(m)})$ ist, gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$,

sodass $w_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j w_j + \sum_{j=i}^{m} \lambda_j x_{\pi(j)}$

1. Fall: $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_m$ sind alle 0.

Dann gilt: $w_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j w_j + 0$

Also $\sum_{j=1}^{i-1} + (-1) w_i = 0$.

Folglich ist $(w_1, \ldots, w_i)$ linear abhängig, im Widerspruch zur Annahme, dass $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig sind. Dieser Fall kann daher nicht eintreten.

2. Fall: Es gibt $j \in \{i, i+1, \dots, m\}$, sodass $\lambda_j \neq 0$.

$$w_i = \dots + \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \cdot x_{\pi(j)} + \dots$$

Das Lemma sagt nun, dass $V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_{i-1}, x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(j-1)}, w_i, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(m)})$.

$\sigma(j) = \pi(i)$,

$\sigma(k) = \pi(k)$ für $k \in \{i+1, \dots, m\} \setminus \{j\}$

$$\begin{array}{ccccccc} x_{\pi(i)}, & x_{\pi(i+1)}, & \dots, & x_{\pi(j-1)}, & x_{\pi(j+1)}, & \dots, & x_{\pi(m)}. \\ \| & \| & & & & & \\ x_{\sigma(j)}, & x_{\sigma(i+1)}, & \dots, & x_{\sigma(j-1)}, & x_{\sigma(j+1)}, & \dots, & x_{\sigma(m)} \end{array}$$

Also gilt

$$V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_i, \overbrace{x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(m)}}^{\text{hier fehlt } x_{\pi(j)}}),$$

weil $\{x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(m)}\} = \{x_{\pi(i)}, \dots, x_{\pi(j-1)}, x_{\pi(j+1)}, \dots, x_{\pi(m)}\}$

---

für's Verständnis: alle Elemente:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_{\pi(i)}, & x_{\pi(i+1)}, & \dots, & x_{\pi(j-1)}, & x_{\pi(j)}, & x_{\pi(j+1)}, & \dots, & x_{\pi(m)} \\ = & = & & = & & = & & = \\ x_{\sigma(j)}, & x_{\sigma(i+1)}, & \dots, & x_{\sigma(j-1)}, & \times & x_{\sigma(j+1)}, & \dots, & x_{\sigma(m)} \\ & & & & \text{werfe ich raus} & & & \end{array}$$

= Folgerung aus Satz

KOROLLAR: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und seien $x_1, \dots, x_m \in V$ so, dass $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_m) = V$.

Sei $r \in \mathbb{N}$ und sei $(w_1, \dots, w_r)$ eine lineare unabhängige Folge von Elementen aus V.

Dann gilt $r \leq m$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $r > m$.

Zusatz: $(w_1, w_2, \dots, w_5)$ linear unabhängig

$V = \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3)$.

Also gilt: $V = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$
$w_4 \in V$, also $w_4 \in \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$.

WIDERSPRUCH zu $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ ist linear unabhängig.

Allgem: Der Steinitzsche Austauschsatz liefert
$V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_m)$.
Also $w_{m+1} \in \mathcal{L}(w_1, \dots, w_m)$ im Widerspruch zur Unabhängigkeit von $(w_1, \dots, w_r)$.

KOROLLAR: Sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.
Sei $(b_1, \dots, b_k)$ eine Basis von V, und sei $(c_1, \dots, c_\ell)$ eine weitere Basis von V.

Wir verwenden das Korollar für
$(x_1, \dots, x_m) = (b_1, \dots, b_k)$ und
$(w_1, \dots, w_r) = (c_1, \dots, c_\ell)$.
Das Korollar liefert $\ell \leq k$.

Bsp.: $(b_1, \dots, b_5)$ ... Basis B
$(c_1, \dots, c_4)$ ... Basis C
„Überlegung am Rand"

Wir verwenden nun das Korollar nun für
$(x_1, \dots, x_m) = (c_1, \dots, c_\ell)$ und
$(w_1, \dots, w_r) = (b_1, \dots, b_k)$.

Das Korollar liefert $k \leq \ell$

Konsequenz:

SATZ: Sei V ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann haben alle Basen von V gleich viele Elemente.

22.5.17

SATZ: Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Dann hat T eine Basis

Beweis: Sei $m \in \{0, \dots, n\}$ maximal, sodass es $v_1, \dots, v_m \in T$ gibt, sodass $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig ist.

Wir zeigen nun, dass $(v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von T ist.
Da $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig ist, bleibt zu zeigen, dass
$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m) = T$$

"$\subseteq$": Sei $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$. Da $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$, gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, sodass $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$.

Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt $v_i \in T$. Also gilt auch $\alpha_i \cdot v_i \in T$ und somit $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \in T$, weil T ein Unterraum ist.
Also $w \in T$.

"$\supseteq$": Sei $x \in T$
Zu zeigen $x \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$. Wir betrachten die Folge $(v_1, v_2, \dots, v_m, x)$
Da m maximal ist, ist diese Folge linear abhängig.
Da $(v_1, \dots, v_m, x)$ linear abhängig ist, gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m \cdot v_m + \beta x = 0$,
und mindestens eine der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ ungleich 0 ist.

1\. Fall: $\beta = 0$:
Dann gilt: $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_m \cdot v_m = 0$,
und mindestens ein $\alpha_i \neq 0$. Dann ist $(v_1, \dots, v_m)$ linear abhängig, dieser Widerspruch zeigt, dass dieser Fall nicht eintreten kann.

2\. Fall: $\beta \neq 0$:
Da $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot v_i + \beta x = 0$,

gilt $\beta x = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, und somit

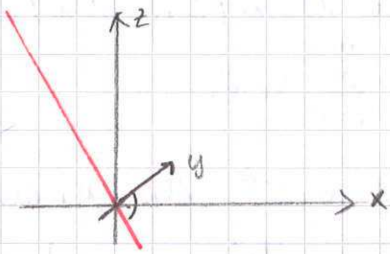
$$x = \sum_{i=1}^{m} -\frac{\alpha_i}{\beta} \cdot v_i$$

Folglich liegt x in $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$

- Jeder Unterraum T von $\mathbb{R}^n$ hat eine Basis.
- Alle Basen haben gleich viele Elemente.

DEFINITION: Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Die <u>Dimension von T</u> ist die Anzahl der Elemente einer Basis von T.

Bsp.: $T = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$



$\dim(T) = 1$

Basis von T:

$B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right)$

Bsp.: $T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}$

$z := t \qquad y := s \qquad x := 2s - 3t$

$T = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Basis von T:

$B = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \dim(T) = 2$

Bsp.: $T = \mathbb{R}^3$

Basis von $T = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \dim(T) = 3$

Bsp.: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Ist diese Folge linear unabhängig?

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$x_4 := t \quad x_3 := -t \quad x_2 := -t \quad x_1 := -t$

$$\mathcal{L} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Folglich:

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren sind linear abhängig

Bsp.: $T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von T: $B = ()$ $\quad \dim(T) = 0$

6.8 Der Rang einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

DEFINITION: Der Rang von A ist die Dimension des Zeilenraums $Z(A)$.

Also: $rk(A) = \dim\left(\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)\right)$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Also ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $Z(A)$.

Somit: $rk(A) = 1$.

Wir bestimmen nun den Rang von A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Basis von $Z(A^T)$:

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$rk(A^T) = 1$$

SATZ: (Rangsatz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sei $Z(A)$ der Zeilenraum von A,

$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0 \}$ der Nullraum von A.

Dann gilt: $\dim(N(A)) = n - \dim Z(A)$ $= \dim(N(A)) = n - rk(A)$

$\quad 3 = 4 - 1$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6.9 Die Eindeutigkeit der Zeilenstaffelform (wird ausgelassen)

6.10 Lösungsmenge inhomogener linearer Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

rechte Seite $\neq 0$: Also heißt das System <u>inhomogen</u>.

24.5.17

DEFINITION: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M ist eine <u>lineare Mannigfaltigkeit</u> $:\Leftrightarrow$

es gibt $x_0 \in M$ und einen Unterraum T von $\mathbb{R}^n$, sodass

$$M = \{ x_0 + t \mid t \in T \}$$

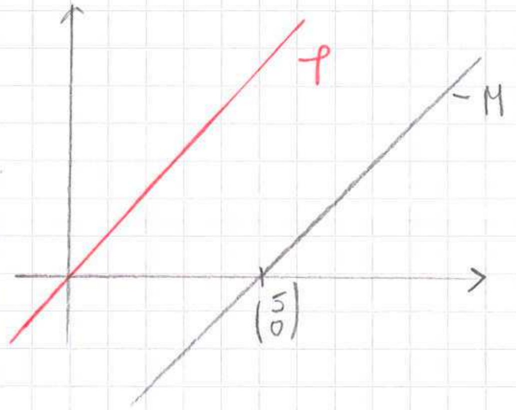
Bsp.: $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y = 5 \right\}$

$x - 2y = 5 \qquad y := t$

$x = 5 + 2t$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$T = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$



$$M = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Sei T ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$x_0 + T := \{ x_0 + t \mid t \in T \}$$

Bsp.: Bestimme die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_3 := s \qquad x_4 := t$

$x_2 = 1 + 3x_3 - 8x_4$

$x_2 := 1 + 3s - 8t$

$3x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 + 5x_4$

$= 4 - 1 - 3s + 8t - 2s + 5t$

$3x_1 = 3 - 5s + 13t$

$x_1 = 1 - \frac{5}{3}s + \frac{13}{3}t$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-5/3\\3\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}13/3\\-8\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungsmenge:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{x_0} + \underbrace{\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-5/3\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}13/3\\-8\\0\\1\end{pmatrix}\right)}_{T}$$

SATZ: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sei $b \in \mathbb{R}^m$, und sei x_0 eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge des Systems $A \cdot x = b$, also:

$$\mathcal{L} = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot z = b \}$$

rechtfertigt den Vorgang von Mathematika

Dann gilt:

$$\mathcal{L} = x_0 + \underbrace{N(A)}_{\text{Nullraum}}.$$

Bsp.: (Mathematika)

$A = \{\{3, 1, 2, -5\}, \{0, 1, -3, 8\}\}$

$b = \{4, 1\}$

LinearSolve $[A, b]$

$\{1, 1, 0, 0\}$

NullSpace $[A]$ (* liefert Basis für $N(A)$ *)

$\{\{13, -24, 0, 3\}, \{-5, 9, 3, 0\}\}$

Also ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems die Menge.

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 13 \\ -24 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -24 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Beweis: Zu zeigen ist

$\mathcal{L} = x_0 + N(A)$.

"$\subseteq$": Sei $x \in \mathcal{L}$. Wir wissen: $A \cdot x = b$.

Zu zeigen: $x \in x_0 + N(A)$

Wir müssen also zeigen, dass es $w \in N(A)$ gibt, sodass

$$x = x_0 + w.$$

Sei $w = x - x_0$.

Wir überprüfen, ob $w \in N(A)$ und berechnen dazu $A \cdot w$.

$A \cdot w = A \cdot (x - x_0) = A \cdot x - A \cdot x_0$

$= b - b = 0$

Also gilt $w \in N(A)$. Folglich gilt:

$$x = x_0 + w \in x_0 + N(A)$$

„$\supseteq$": Sei $x \in x_0 + N(A)$

zu zeigen $x \in \mathcal{L}$, also $A \cdot x = b$

Da $x \in x_0 + N(A)$, gibt es $t \in N(A)$, sodass $x = x_0 + t$.

Wir berechnen nun $A \cdot x$:

$$A \cdot x = A \cdot (x_0 + t) =$$
$$A \cdot x_0 + A \cdot t =$$
$$b + 0 = b$$

Folglich gilt $x \in L$.

Bsp.: $x - 4y + 9z = 5$

$$y := \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$x - 4y + 9z = 0$$
$$y = s$$
$$z = t$$
$$x = 4s - 9t$$

$$\mathcal{L} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-9\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungsmenge:

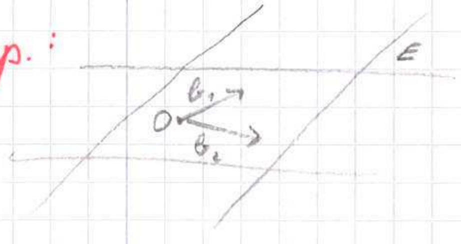
$$\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

In unserem Beispiel war:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -4 & 9\end{pmatrix}$$
$$b = (5) \in \mathbb{R}^1$$
$$x_0 = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$N(A) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

6.11 Koordinaten

Bsp.:



$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$
$$b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$$

$$v = 2 \cdot b_1 + b_2$$
$$v = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\12\end{pmatrix}.$$

$$E = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}\right).$$

(b_1, b_2) ist eine Basis von E.

$B = (b_1, b_2)$

Das Koordinatendupel von v bezüglich B ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(v)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}\right)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad 2 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2$

$\left(\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ -30 \end{pmatrix}\right)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad 0 b_1 - 5 b_2$

$(17 b_1 - 8 b_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \end{pmatrix}$

$(v)_B = \begin{pmatrix} 317 \\ -29 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Dann $v = 317 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 29 * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

29. Mai 17

$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

$x = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten von x bezüglich der Basis B sind $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$x = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(x)_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

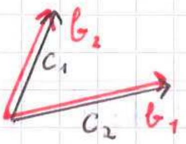
Welche der folgenden Gleichheiten gilt?

$\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$: ja

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)}_{a} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$a : \{1, 2\} \to \mathbb{R}^3$$

$$a(1) = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \qquad a(2) = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$



SATZ: Seien $n, m \in \mathbb{N}$, sei $B = (b_1, \dots, b_m)$ eine Basis des Unterraums T von $\mathbb{R}^n$, und sei $t \in T$.

Dann gibt es genau ein $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$\lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_m \cdot b_m = t$$

Beweis:

Zuerst zeigt man $!\exists x : (A(x)) \iff$ Existenz Eindeutigkeit

und dann $((\exists x : A(x)) \land (\forall x, y : (A(x) \land A(y)) \Rightarrow x = y))$

<u>Existenz</u>: Da $(b_1, \dots b_m)$ eine Basis von T ist, gilt $L(b_1, \dots, b_m) = T$.

Da $t \in T$ ist t also eine Linearkombination von $b_1, \dots, b_m$; es gilt also $t \in L(b_1, \dots, b_m)$

Folglich gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, sodass $t = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i$. Das Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ leistet das Gewünschte.

$[(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ erfüllt die gewünschte Eigenschaft

<u>Eindeutigkeit</u>: Seien $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ und $(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ so, dass $t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i * b_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i * b_i$

Zu zeigen: $\forall i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i = \mu_i$

Dann gilt:

$$0 = t - t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m} \mu_i b_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i * b_i - \mu_i * b_i)$$

$= \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \mu_i) * b_i$

Da $(b_1, \dots, b_m)$ linear unabhängig ist, gilt für alle $i \in \{1, \dots, m\}$:

$\lambda_i - \mu_i = 0$.

Also gilt für alle $i \in \{1, \dots, m\}$: $\lambda_i = \mu_i$

DEFINITION: Sei $\overset{B=}{(b_1, \dots, b_m)}$ eine Basis von T, und sei $s \in T$.
Das Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, das $\alpha_1 * b_1 + \dots + \alpha_m * b_m = s$ erfüllt, heißt <u>Koordinatentupel von s</u> bezüglich $(b_1, \dots, b_m)$, und wir kürzen $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ durch $(t)_B$ ab.

Bsp.: Die Ebene E hat die Basen

$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ und

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie $(v)_A$.

$v = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(v)_A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\overline{B}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}$ $\qquad \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$

$(v)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sei $(b_1 \dots, b_m)$ eine Basis von T, und sei $\overline{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Matrix

$\overline{B} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_m \\ | & & | \end{pmatrix}$, in deren Spalten die Vektoren aus B stehen.

Sei $v \in T$. Dann ist $(v)_B$ die Lösung des Gleichungssystems.

$\overline{B} \cdot x = v$

Zushg: $\overline{B} \cdot (v)_B = v$

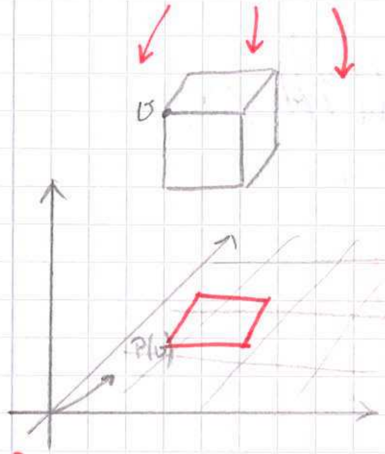
VII Orthogonalität

Bsp. mit Fernseher und Pixel ausfüllen

3D - 2D

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A hilft uns jeden Punkt zu berechnen um ein 2D Objekt darzustellen



Sonne von oben
Schatten

Sei $\underset{\in \mathbb{R}^3}{P(v)}$ die Projektion von $\underset{\in \mathbb{R}^3}{v}$ auf die Ebene. Wir zeichnen nur $\underset{\in \mathbb{R}^2}{(P(v))_B}$

7.1 Skalarprodukt

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

- $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$
- $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Der Winkel zwischen x und y ist jenes $\varphi \in [0, \pi[$, sodass $\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

- Die Vektoren x, y sind aufeinander normal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

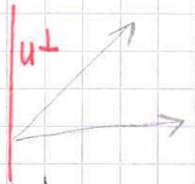
31.5.17

7.2. Der Normalraum auf einer Menge von Vektoren

Das orthogonale Kompliment $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$U^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U : \langle x, u \rangle = 0\}$$

Bsp.: $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Gesucht: $U^\perp$

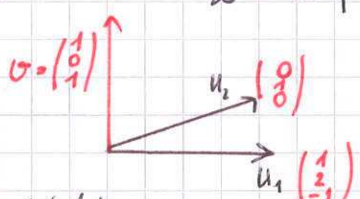


$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U^\perp \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \text{ und } \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$x_3 := s \qquad x_2 := 0 \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$x_1 := s$



Also gilt: $U^\perp = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Bsp.: Sei $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

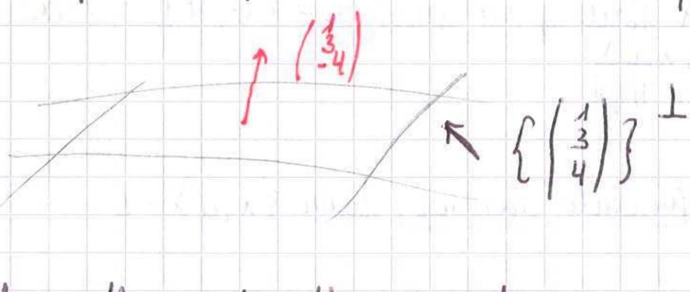
Wir suchen $X^\perp$

Ein Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ liegt in $X^\perp$, wenn $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, also wenn

$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$

$x_2 := t \qquad x_3 := s \qquad x_1 = -3t + 4s$

$$\mathcal{L} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$



Eigenschaften des orthogonalen Komplements:

SATZ: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

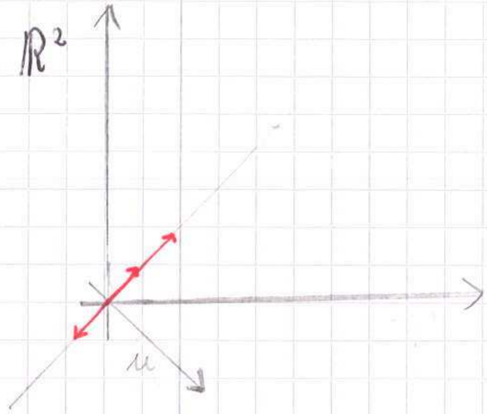
(1) $U^\perp$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. (2) $U^\perp = (\mathcal{L}(U))^\perp$ (3) $(U^\perp)^\perp = \mathcal{L}($

DEFINITION: Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}, \lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

= die Menge aller Vektoren.

Im $\mathbb{R}^2$



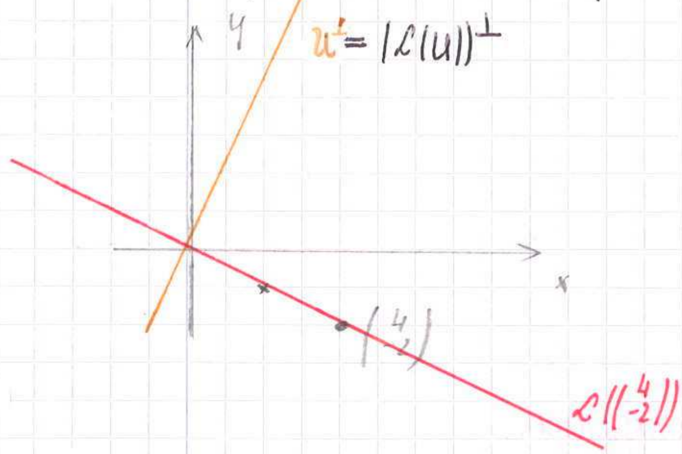
$$\mathcal{U} = \left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{U} = \{u\}$$

$$\mathcal{U}^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0\right\}$$

$$U^{\perp} : 4x - 2y = 0$$

In diesem Bsp. hatten wir $\mathcal{U} = \left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

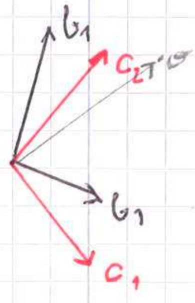


$\mathcal{L}(U)$
$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{U}^{\perp}$

$(\mathcal{L}(U))^{\perp}$

7.3 Orthonormalbasis



$$B = (b_1, b_2)$$

$$(v)_B = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

$$(v)_C = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 1,25 \end{pmatrix}$$

DEFINITION: Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

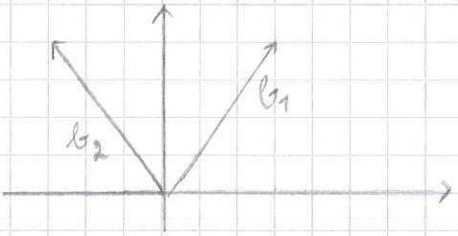
$B = (b_1, \ldots, b_k)$ ist eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB) von T, wenn

(1) $(b_1, \ldots, b_k)$ ist eine Basis von T.

(2) $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} : i \neq j \Rightarrow \langle b_i, b_j \rangle = 0$.

(3) $\forall i \in \{1,\dots,k\}: \|b_i\| = 1$

Bsp.: $\left(\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right)$ ist eine ONB des $\mathbb{R}^2$



Bsp.: $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ ist ONB des $\mathbb{R}^2$

Bsp.: $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ ist ONB des $\mathbb{R}^2$

Bsp.: $\left(\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ ist eine ONB der $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Finden einer ONB:

Basis $(b_1,\dots,b_k)$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Gram-Schmidt-Ortho}}$

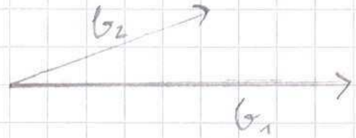
$\downarrow$

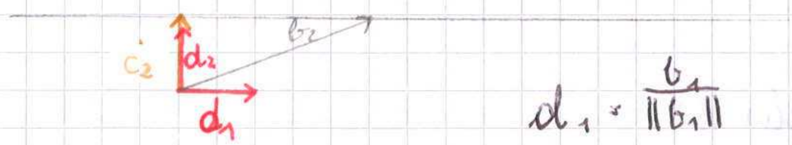
ONB $(c_1,\dots,c_k)$ von T

7.4 Das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren.

Gegeben ist ein Unterraum T mit Basis $(b_1,\dots,b_m)$

Gesucht ist eine ONB $(d_1,\dots,d_m)$ von T.





$$d_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

$$c_2 = b_2 + \alpha \cdot d_1$$

1. Schritt: $c_1 = b_1$; $d_1 := \frac{1}{\|c_1\|} \cdot c_1$

2. Schritt: Wir suchen $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\langle \underbrace{b_2 + \alpha d_1}_{c_2}, d_1 \rangle = 0$$

$$\langle b_2, d_1 \rangle + \alpha \cdot \langle d_1, d_1 \rangle = 0$$

$$\langle b_2, d_1 \rangle + \alpha \cdot \|d_1\|^2 = 0$$

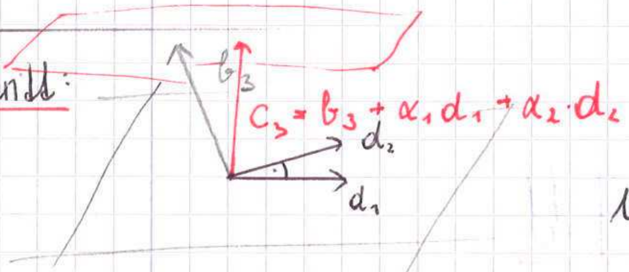
$$\langle b_2, d_1 \rangle + \alpha \cdot 1 = 0$$

$$\alpha = -\langle b_2, d_1 \rangle$$

$$c_2 = b_2 - \langle b_2, d_1 \rangle \cdot d_1$$

$$d_2 = \frac{1}{\|c_2\|} \cdot c_2$$

3. Schritt:



ich sper b_3 so auf der Ebene, bis er normal auf d_1 und d_2 steht

$$\langle b_3 + \alpha_1 \cdot d_2 + \alpha_2 \cdot d_2, d_1 \rangle = 0$$

und $\langle b_3 + \alpha_1 d_2 + \alpha_2 d_2, d_2 \rangle = 0$

$$\langle b_3, d_1 \rangle + \alpha_1 \langle d_1, d_1 \rangle + \alpha_2 \langle d_2, d_1 \rangle = 0$$
$$\langle b_3, d_2 \rangle + \alpha_1 \langle d_1, d_2 \rangle + \alpha_2 \langle d_2, d_2 \rangle = 0$$

$$\langle b_3, d_1 \rangle + \alpha_1 + 0 = 0$$
$$\langle b_3, d_2 \rangle + 0 + \alpha_2 = 0$$

$$c_3 = b_3 - \langle b_3, d_1 \rangle d_1 - \langle b_3, d_2 \rangle d_2$$

i-ter-Schritt: $d_1, \dots, d_{i-1}$ sind bereits bestimmt

$$\left[\begin{array}{l} c_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_i, d_j \rangle * d_j \\ d_i = \frac{1}{\|c_i\|} \cdot c_i \end{array}\right.$$

Aufgabe: Bestimme ONB von

$$T = \mathcal{L}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{b_3}\right)$$

1. Schritt: $c_1 = b_1$

$$d_1 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

2. Schritt: $c_2 = b_2 - \langle b_2, d_1 \rangle * d_1$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle * \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix} - \left(\frac{1}{4} * 4\right) * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$d_2 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix}\right\|} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

3. Schritt: $c_3 = b_3 - \langle b_3, d_1 \rangle * d_1 - \langle b_3, d_2 \rangle * d_2$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2} * \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle * \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$- \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2} * \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle * \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

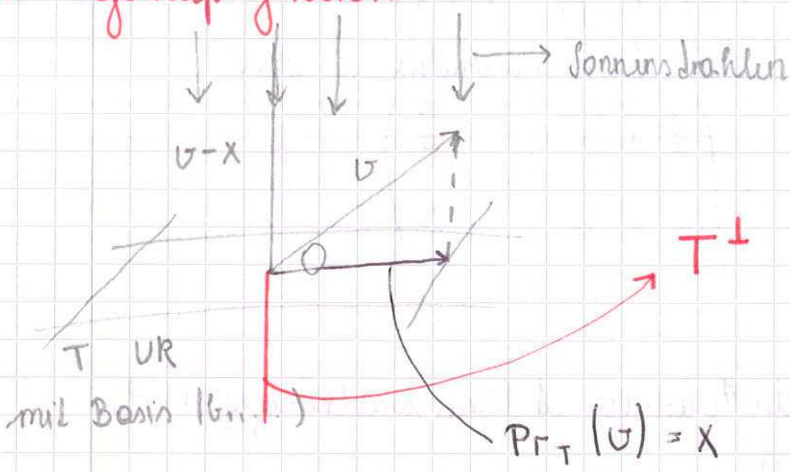
$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$d_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{ONB}(d_1, d_2, d_3)$$
$$= \text{ONB}\left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

7.5 Orthogonalprojektion



$Pr_T(v)$ ... die Orthogonalprojektion von v auf T

DEFINITION: Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, sei $v \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen x eine Orthogonalprojektion von v auf T, wenn

(1) $x \in T$

(2) $v - x \in T^\perp$

SATZ: Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Wir nehmen an, dass die Spalten von A linear unabhängig sind. Dann ist A invertierbar.

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ \vdots \\ — z_n — \end{pmatrix}$

Da $(s_1, \dots s_n)$ linear unabhängig ist, gilt

$\dim \mathcal{L}(s_1, \dots, s_n) = n$. Somit gilt $\mathcal{L}(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{R}^n$.

Insbesondere gilt dann $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(s_1, \dots, s_n)$.

Es gibt also $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3}, \dots, \lambda_{1,n} \in \mathbb{R}$,

sodass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_{1,1} * s_1 + \dots + \lambda_{1,n} * s_n$

Das bedeutet, dass

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} \\ \lambda_{1,2} \\ \vdots \\ \lambda_{1,n} \end{pmatrix}}_{\text{erste Spalte von } R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir machen das Gleiche für $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$.

Insgesamt erhalten wir auf diese Weise eine Matrix R mit

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt: $A \cdot R = E_n$

Wir zeigen nun, dass auch die Zeilen von A linear unabhängig sind.

Seien dazu $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\alpha_1 * z_1 + \dots + \alpha_n * z_n = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}}_{\bar{\alpha}} \cdot \begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ \vdots \\ — z_n — \end{pmatrix} = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

Also $\bar{\alpha} \cdot A = 0 \quad | \cdot R$

$\bar{\alpha} \cdot A \cdot R = 0$

folglich $\bar{\alpha} \cdot E_n = 0$ Somit $\bar{\alpha} = 0$

Da $(z_1, \dots, z_n)$ also linear unabhängig ist gilt $\dim(\mathcal{L}(z_1, \dots, z_n)) = n$

und somit $\mathcal{L}(z_1, \dots, z_n) = \mathbb{R}^n$.

Wie vorher bekommen wir daraus eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass

$$L \cdot A = E_n.$$

Nun gilt:

$$L = L \cdot (A \cdot R) = (L \cdot A) \cdot R = E \cdot R = R$$

Folglich ist A invertierbar (mit inverser Matrix R).

LEMMA: Seien $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$, sodass $(b_1, \dots, b_k)$ linear unabhängig ist.

Sei $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_k \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$

Dann gilt $B^T \cdot B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und $B^T \cdot B$ ist invertierbar.

Beweis: Wir verwenden den vorhergehenden Satz und zeigen, dass die Spalten von $B^T \cdot B$ linear unabhängig sind.

Sei $v \in \mathbb{R}^k$ so, dass

$$(B^T \cdot B) \cdot v = 0$$

$$B \cdot v = \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}$$

$v \in \mathbb{R}^{k \times 1}$

$$(B v)^T \cdot (B \cdot v)$$

Es gilt:

$$v^T \cdot (B^T \cdot B) \cdot v = 0$$

$$= \longleftrightarrow \cdot \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(B \cdot v)^T \cdot (B \cdot v) = 0$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a^T \cdot b$$

$$= (a_1 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\langle a, b \rangle)$$

Es gilt also

$$\langle B \cdot v, B \cdot v \rangle = 0$$

Somit gilt $B v = 0$.

Da die Spalten von B linear unabhängig sind, gilt dann $v = 0$. Das schließt den Beweis dafür ab, dass die Spalten von $B^T \cdot B$ linear unabhängig sind. Somit ist nach dem vorhergehenden Satz die Matrix $B^T \cdot B$ invertierbar.

Wir versuchen nun, ein solches x zu finden.

Sei $(b_1, \dots, b_k)$ eine Basis von T

Sei $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_k \end{pmatrix}$ die $n \times k$-Matrix, deren Spaltenvektoren die Vektoren $b_1, \dots, b_k$ sind.

Für ein $x \in T$ muss es $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$x = \alpha_1 \cdot b_1 + \dots + \alpha_k \cdot b_k$$

$$x = B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

Ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ liegt in $T^\perp$, wenn er auf $b_1, \ldots, b_k$ normal steht, also wenn $\langle y, b_1\rangle = \langle y, b_2\rangle = \ldots = \langle y, b_n\rangle = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \text{---} & b_1 & \text{---} \\ \text{---} & b_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & b_n & \text{---} \end{pmatrix}}_{B^T} \cdot \begin{pmatrix} | \\ y \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Überlegung können wir die Bedingungen $v - x \in T^\perp$ als Gleichung $B^T \cdot (v - x) = 0$ schreiben.

$$B^T \cdot \Big(v - \underbrace{B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\text{gesucht}}\Big) = 0$$

$$B^T \cdot v - B^T \cdot B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

$$B^T \cdot v = \underbrace{B^T \cdot B}_{\text{zusammen}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$(B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \Big| \cdot B$$

$$B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v = B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = x$$

Wir haben also einen Kandidaten für x gefunden, nämlich

$$\underline{\underline{x = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v}}$$

Wir überprüfen, ob x das Gewünschte leistet:

(1) Da $x = B \cdot w$ (mit $w = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v$), liegt x in der linearen Hülle der Spalten von B, also $x \in T$.

(2) Wir überprüfen nun, ob $v - x \in T^\perp$.
Dazu berechnen wir

$$B^T \cdot (v - x)$$
$$= B^T \cdot (v - B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v)$$

$= B^T \cdot v - \underline{B^T \cdot B} \cdot \underline{(B^T B)^{-1}} \cdot B^T \cdot v$

$= B^T \cdot v - B^T \cdot v$

$= 0$

PROJEKTIONSFORMEL:

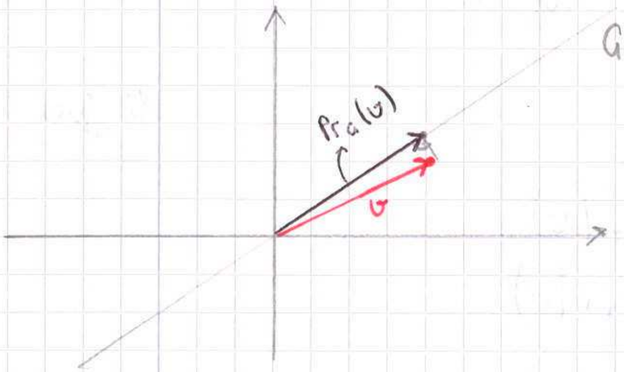
$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$T = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k)$$

$$Pr_T(v) = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot v$$

Bsp.: Gegeben: $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 4y = 0 \right\}$
$v \in \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gesucht $Pr_G(v)$ = Projektion v auf G



Wir berechen dazu eine Basis von G.

$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ ... Basis von G

$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$Pr_{(G)}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left((4 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot (4 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (25)^{-1} \cdot (4 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{25}\right) \cdot (22) = \underline{\underline{\frac{22}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Bsp.: Wir berechnen die orthogonale Projektion von $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $e = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Basis von $e = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Pr_e\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Projektion von v auf T ist eindeutig.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x \in T$, $v - x \in T^\perp$ und $y \in T$, $v - y \in T^\perp$.

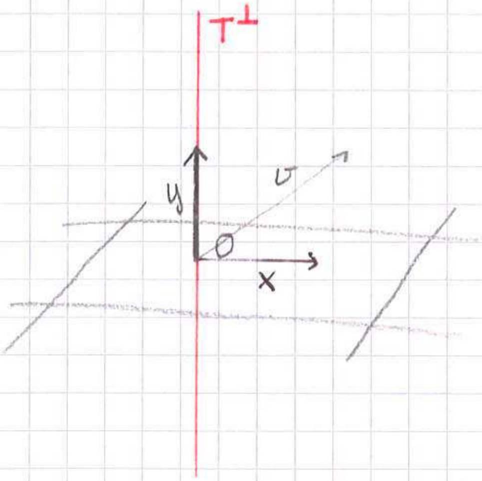
$x - y \in T$.

$x - y = (v - y) - (v - x) \in T^\perp$

$\langle x - y, x - y \rangle = 0$, also $\|x - y\| = 0$

somit gilt $x - y = 0$, also $x = y = 0$

12. Juni 16



$x = Pr_T(v)$

$y = Pr_{T^\perp}(v)$

Vermutung: $x + y = v$

SATZ: Sei $n \in \mathbb{N}$, T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$Pr_{T^\perp}(v) = \underbrace{v - Pr_T(v)}_{y}$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $y = v - Pr_T(v)$ folgende beiden Eigenschaften erfüllt:

$y \in T^\perp$ und $v - y \in (T^\perp)^\perp$

Vergleichbar mit
$x = Pr_T(v)$
$x \in T$, $v - x \in T^\perp$
nur $x = y$ und $T = T^\perp$

Da $x = Pr_T(v)$ die Eigenschaften der Projektion von v auf T erfüllt, gilt $v - x \in T^\perp$ und $x \in T$.

Also gilt:

$$y = v - Pr_T(v) = v - x \in T^\perp$$

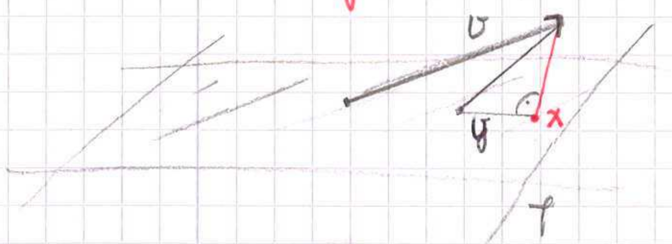
$\Rightarrow$ daher gilt $y \in T^\perp$

Weiters: $v - y = v - (v - Pr_T(v))$
$= Pr_T(v) \in T = (T^\perp)^\perp$

Folglich erfüllt $y = v - Pr_T(v)$ die Eigenschaften in der Projektion von v auf $T^\perp$.

Also: $Pr_{T^\perp}(v) = y = v - Pr_T(v)$.

7.6 Abstandsberechnungen mithilfe der Orthogonalprojektion



SATZ: Sei T ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$

Dann gilt für alle $y \in T$:

$$y \neq Pr_T(v) \Rightarrow \|y - v\| > \|Pr_T(v) - v\|.$$

Beweis: Sei $x = Pr_T(v)$, sei $y \in T \setminus \{x\}$.

Da $x \in T$ und $y \in T$, gilt $x - y \in T$.

Da $x = Pr_T(v)$, gilt $v - x \in (T^\perp)^\perp$.

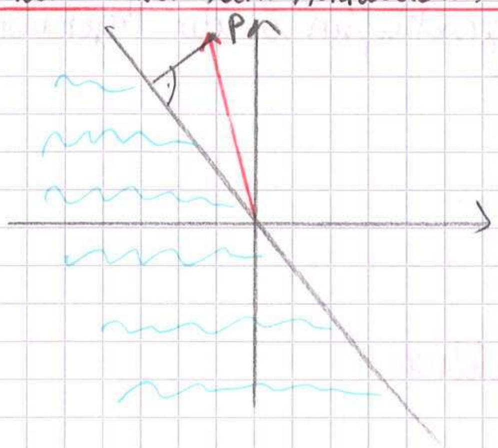
Also gilt: $\|v - y\|^2 = \underbrace{\|y - x\|^2}_{> 0} + \|x - v\|^2$ Phytagoras

Also $\|y-v\|^2 > \|v-x\|^2$, somit
$\|y-v\| > \|v-x\|$

$$\begin{aligned}\|y-v\|^2 &= \|y-x+x-v\|^2 \\ &= \langle (y-x)+(x-v), (y-x)+(x-v)\rangle \\ &= \langle y-x, y-x\rangle + 2\cdot\langle \underbrace{x-v}_{T^\perp}, \underbrace{y-x}_{T}\rangle + \langle x-v, x-v\rangle \\ &= \|y-x\|^2 + \|x-v\|^2\end{aligned}$$

andere Möglichkeit
Phytagoras mit Skalarprodukt ersetzt

Wie komme ich am schnellsten ins Wasser?



Das löst folgendes Problem:

Gegeben: v ... Punkt
T ... Unterraum

Gesucht: Der Abstand von v zu T;
jenes $t \in T$, für das $\|v-t\|$ minimal ist

Lösung:
$t := Pr_T(v)$
$dis(v,T) = \|v-t\|$
$= \|Pr_{T^\perp}(v)\|$.

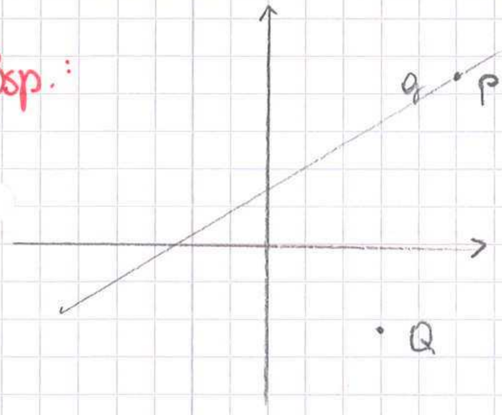
Allgemeineres Problem:

Gegeben: v_1, v_2 ... Punkte
T_1, T_2 ... Unterräume

Gesucht: Der Abstand der beiden Mannigfaltigkeiten v_1+T_1 und v_2+T_2 voneinand
jene $t_1 \in T_1$ und $t_2 \in T_2$, für die $\|(v_1+t_1)-(v_2+t_2)\|$ minimal wird.

Die bisher betrachteten Abstandsberechnungen sind Spezialfälle dieses Problems

Bsp.:



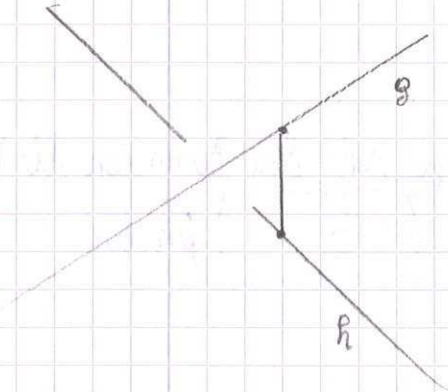
$g = P + \mathcal{L}(\vec{r})$

Gesucht: $dist(g, Q)$.

$v_1 = P$ $\quad$ $v_2 = Q$

$T_1 = \mathcal{L}(\vec{r})$ $\quad$ $T_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Bsp.: (Im $\mathbb{R}^3$)



$g = P_1 + \mathcal{L}(\vec{r}_1)$

$h = P_2 + \mathcal{L}(\vec{r}_2)$

$v_1 = P_1$ $\quad$ $v_2 = P_2$

$T_1 = \mathcal{L}(\vec{r}_1)$ $\quad$ $T_2 = \mathcal{L}(\vec{r}_2)$

DEFINITION: (Summe von Unterräumen)

Seien U, V Unterräume des $\mathbb{R}^n$.

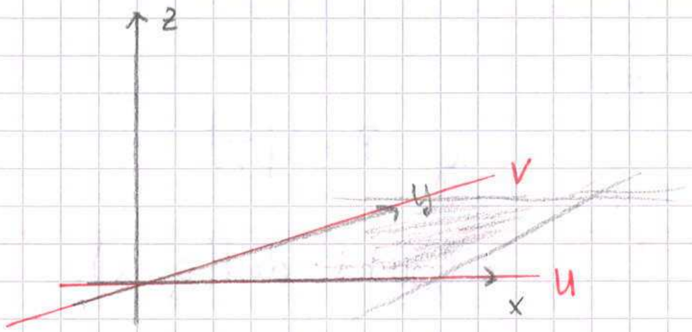
Wir definieren W als die Summe von U und V durch

$$W = \{ u + v \mid u \in U, v \in V \}$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists\, u \in U, v \in V : x = u + v \}$$

W wird als $U + V$ abgekürzt.

Bsp.: $\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

$V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$



$$\mathcal{U} + V = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$\mathcal{U} + V : z = 0$

$\mathcal{U} = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k)$

$V = \mathcal{L}(c_1, \dots, c_l)$

$\mathcal{U} + V = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l)$

$(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l)$ muss nicht linear unabhängig sein. Eine Basis von $\mathcal{U} + V$ können wir finden, indem wir die Zeilenstaffelform von $\begin{pmatrix} - b_1 - \\ \vdots \\ - b_k - \\ - c_1 - \\ \vdots \\ - c_l - \end{pmatrix}$ finden.

Lösungsweg für dieses allgemeinere Problem:

Gegeben: $M_1 = v_1 + P_1$

$M_2 = v_2 + P_2$

Gesucht: $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, sodass $\|p_1 - p_2\|$ minimal ist.

$p_1 = v_1 + t_1$, $p_2 = v_2 + t_2$

Wir bestimmen dazu $t_1 \in P_1$ und $t_2 \in P_2$, sodass $\|(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2)\|$ minimal wir

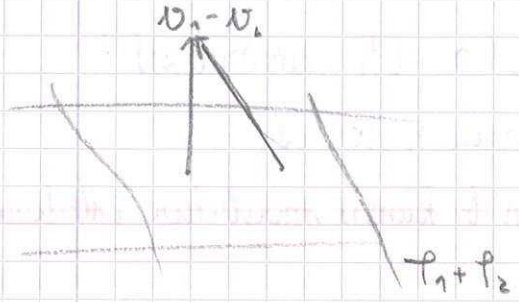
$\mathrm{dist}(M_1, M_2)$

$$= \inf \{ \|(v_1 + t_1) - (v_2 + t_2)\| : t_1 \in P_1, t_2 \in P_2 \}$$

Infimum ~ Minimum

$$= \inf \{ \|v_1 - v_2 - (\underbrace{t_2}_{} - \underbrace{t_1}_{})\| : t_1 \in P_1, t_2 \in P_2 \}$$

$$= \inf \{ \|(v_1 - v_2) - s\| : s \in P_1 + P_2 \}$$



Wir wissen, dass $\|(v_1 - v_2) - s\|$ genau dann minimal ist, wenn

$$s = Pr_{T_1+T_2}(v_1 - v_2).$$

Nun bestimmen wir $\bar{t}_1 \in T_1$ und $\bar{t}_2 \in T_2$, sodass $\bar{t}_2 - \bar{t}_1 = s$.

Dann haben die Punkte $v_1 + \bar{t}_1$ und $v_2 + \bar{t}_2$ voneinander minimalen Abstand.

14.06.17

7.7 Die bestapprox. Lösungsgleichung eines linearen Gleichungssystems

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

DEFINITION: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Eine bestapproximierende Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist $x \in \mathbb{R}^n$, für das $\|A \cdot x = b\|$ min. ist.

gegeben: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$A \cdot x_1 - b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|A \cdot x_1 - b\| = 1$$

$$A \cdot x_2 - b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \|A \cdot x_2 - b\| = 1$$

$$A \cdot x_3 - b = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

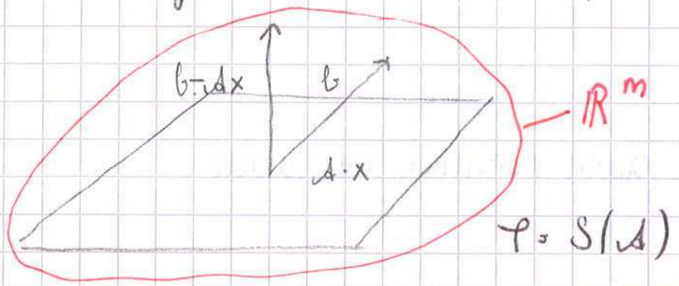
$$= \begin{pmatrix} 8/11 \\ 23/11 \\ -1/11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/11 \\ 1/11 \\ -1/11 \end{pmatrix} \qquad \|A \cdot x_3 - b\| = \frac{1}{11} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \sqrt{11} = 0{,}2032$$

Problem: Wie finden wir jenes $x \in \mathbb{R}^n$, für das $\|A \cdot x - b\|$ minimal ist?

Die Menge $T = \{A \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ ist der Spaltenraum von A.

$A \cdot x$ ist jenes Element aus $S(A)$, das von b kleinst möglichen Abstand hat.



$A \cdot x$ ist die Orthogonalprojektion von b auf T. $b - A \cdot x$ muss also auf T normal stehen.

$b - A \cdot x$ muss auf alle Spaltenvektoren von A normal stehen.

x muss also die Gleichung $A^T \cdot (b - A x) = 0$ erfüllen.

$$A^T \cdot b - A^T \cdot A \cdot x = 0$$

Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist $A^T \cdot A$ invertiert und wir erhalten $A^T \cdot b = A^T \cdot A \cdot x$ und daher:

$$(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b = x$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot (-6) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -11 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/11 & 6/11 \end{array}\right) \cdot (-2) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/11 & -1/11 \\ 0 & 1 & -1/11 & 6/11 \end{array}\right)$$

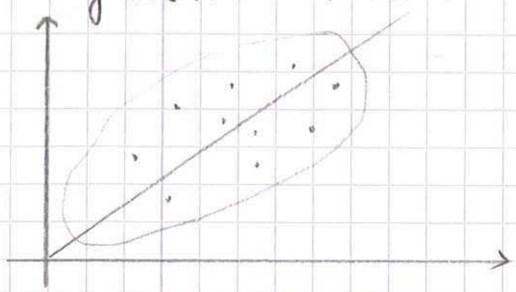
$$(A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Anwendung:

Beste Gerade durch Punktwolke:



Gegeben: $(x_1, y_1)(x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: beste Gerade $y = k \cdot x + d$ durch diese Punktwolke

Gesucht ist (k, d), das folgendes Gleichungssystem „möglichst gut" erfüllt:

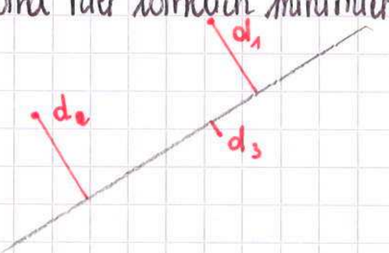
$$A \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - b$$

$$\begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

Was wird hier wirklich minimiert?

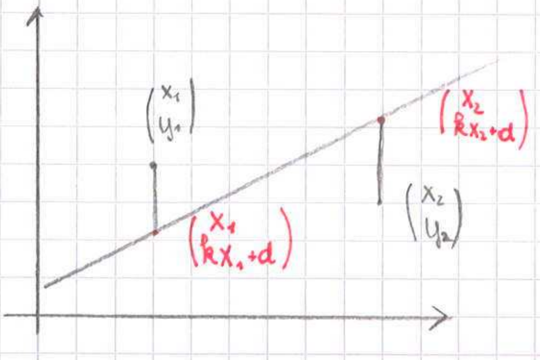


$|d_1| + |d_2| + |d_3| \to \min$. !

$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \to \min$

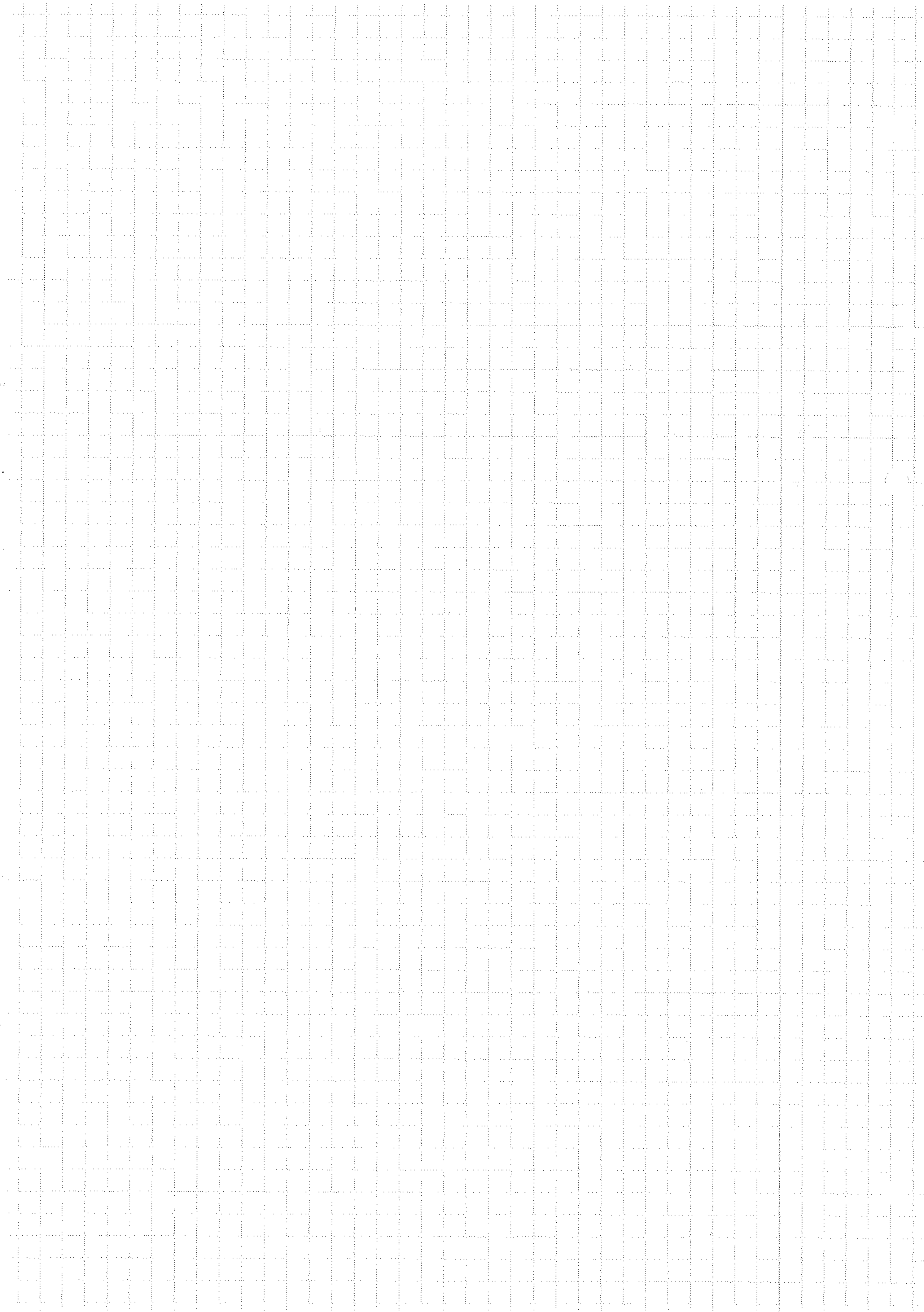
Wir suchen also jenes $\begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix}$, für das $\left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|$ minimal wird.

$\left\| \begin{pmatrix} (k \cdot x_1 + d) - y_1 \\ (k \cdot x_2 + d) - y_2 \\ \vdots \\ (k \cdot x_n + d) - y_n \end{pmatrix} \right\|$ wird also minimal.



$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 \to \min.$

$f^2 = (((kx_1 + d) - y_1)^2 + ((kx_2 + d) - y_2)^2 + \dots$



VIII Ringe, Körper, Vektorraum

$A = \{0, 1\}$

$+ : A^2 \to A$

$+(0,0) = 0$

$+(0,1) = +(1,0) = 1$

$\underbrace{+(1,1)}_{1+1} = 0$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Sei A eine Menge, $n \in \mathbb{N}$. Eine n-stellige Operation auf A ist eine Funktion $f: A^n \to A$.

Eine algebraische Struktur (Algebra) ist ein Tupel $(A; f_1; \dots ; f_r)$, wobei A eine nicht leere Menge und $f_1, \dots, f_r$ endlichstellige Operationen auf A sind.

Bsp.: für algebraische Strukturen

$(\mathbb{N}; +)$ $\quad (\mathbb{Z}; +; \circ)$ $\quad (\mathbb{R}, +, -, \cdot)$ $\quad (\{f, t\}, \wedge, \vee)$

$(B^B, \circ)$ $\quad \alpha, \beta \in B^B$

$\alpha \circ \beta(b) = \alpha(\beta(b))$

DEFINITION: Eine Algebra $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, wenn $R \neq 0$, $+, \cdot : R \times R \to R$, $- : R \to R$, $0, 1 \in R$ und für alle $x, y, z \in R$ gilt — 19.6.17

(1) $x + 0 = x$

(2) $x + (-x) = 0$

(3) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(4) $x + y = y + x$

(5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(6) $x \cdot y = y \cdot x$

(7) $x \cdot 1 = x$

(8) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Links distributiv gesetz)

Bsp.: 1, $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

2, $(\mathbb{N}_0, +, -, \cdot, 0, 1)$: $-$ ist nicht definiert $-5 = ?$ } kein kommutativer Ring mit Eins

$(\mathbb{N}_0, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Halbring

3, $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Zusätzlich erfüllt er: $\forall x \in R \setminus \{0\} \; \exists y \in R : x \cdot y = 1$

$(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper.

4, $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist sogar ein Körper

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2, \; a_1 b_2 + b_1 a_2)$

$(a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2)$

$= \ldots$

$i^2 = -1.$

5, $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper.

6, $Mat_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$\left(Mat_2(\mathbb{R}), +, -, \cdot, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ ist kein kommutativer Ring mit Eins

da $\exists x, y \in Mat_2(\mathbb{R}) : x \cdot y \neq y \cdot x$

$\left(Mat_2(\mathbb{R}), +, -, \cdot, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ erfüllt auch das Rechtsdistributiv-gesetz $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. $Math_2(\mathbb{R})$ ist ein <u>Ring mit Eins.</u>

7, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$f + g =: h$

$h(x) = f(x) + g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

$(f + g) \cdot (x) = f(x) + g(x)$ für $x \in R$

$+ : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\qquad$ $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{O}$:

$\mathbb{O}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{1}$:

$\mathbb{1}(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$

$f \circ g\,(x) := f(g(x))$ für $x \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, -, \circ, \mathbb{0}, \mathbb{1})$

erfüllt: (1), (2), (3), (4), (5),

(5) da: $(f \circ g) \circ h\ (x) =$
$= (f \circ g)\,(h(x))$
$= f(g(h(x)))$

$f \circ (g \circ h)(x) =$
$= f((g \circ h)(x))$
$= f(g(h(x)))$

Also ist die Hintereinanderausführung von Funktionen assoziativ.

(6) ist nicht erfüllt: $f(x) = 2$ für $x \in \mathbb{R}$
$g(x) = 4$ für $x \in \mathbb{R}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2$ für $x \in \mathbb{R}$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = 4$ für $x \in \mathbb{R}$

Also ist $\circ$ nicht kommutativ

$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, -, \circ, 0, id_{\mathbb{R}})$ erfüllt (1), (2), (3), (4), (5), (7)

und (7'): $1 \cdot x = x$, denn
$id_{\mathbb{R}} \circ f = f$ für alle $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

und (8'): $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, denn
$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$,

aber nicht (8)

$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, -, \circ, 0, id_{\mathbb{R}})$ ist ein Fastring mit Eins (ein Rechtsfastring mit Eins).

Eine Struktur $(R,+,-,0)$, die (1), (2), (3) erfüllt, heißt Gruppe.

Eine Struktur $(R,+,-,0)$, die (1), (2), (3), (4) erfüllt, heißt abelsche Gruppe.

8, $\mathbb{R}[x] := \{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}[x], +, -, \cdot, 0, 1 \cdot x = 1)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Er heißt der Polynomring in einer Variablen über $\mathbb{R}$.

SATZ: Sei $(R,+,-,\cdot,0,1)$ ein kommutativer Ring mit Eins.

Dann gilt:

(1) $\forall x \in R: \ -(-(x)) = x$

(2) $\forall x \in R: \ x \cdot 0 = 0$

(3) $\forall x,y \in R: \ -(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$

(4) $-0 = 0$

Beweis: (1)
$$
\begin{aligned}
-(-(-x)) &\underset{(1)}{=} -(-x)) + 0 \\
&\underset{(4)}{=} 0 + (-(-(x))) \\
&\underset{(2)}{=} (x + (-x)) + (-(-x))) \\
&\underset{(3)}{=} x + ((-x) + (-(-(x)))) \\
&\underset{(2)}{=} x + 0 = x.
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
x \cdot 0 &\underset{(1)}{=} x \cdot 0 + 0 \\
&\underset{(2) \text{ mit } \tilde{x} = x \cdot 0}{=} x \cdot 0 + (\underset{\tilde{x}}{x \cdot 0} + (-(\underset{\tilde{x}}{x \cdot 0}))) \\
&\underset{(3)}{=} (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)) \\
&\underset{(4)}{=} x \cdot (0 + 0) + (-(x \cdot 0))
\end{aligned}
$$

$$\underset{(1)}{=} x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) \underset{(2)}{=} 0$$

(3) analog

Frage: Gilt in allen kommutativen Ringen mit Eins:

$$\forall x, y \in R : (x \cdot y) \cdot x = (x \cdot x) \cdot y$$

$$(x \cdot y) \cdot x) = x \cdot (y \cdot x) = x \cdot (x \cdot y)$$
$$= (x \cdot x) \cdot y \qquad \Rightarrow \text{ja}$$

Frage: Gilt in allen kommutativen Ringen mit Eins:

$$\forall x, y \in R : (x y) \cdot x = y \cdot (x \cdot y)$$

$$R = \mathbb{Z} : x = 4, \quad y = 2$$
$$(4 \cdot 2) \cdot 4 = 2 \cdot (4 \cdot 2)$$
$$32 \neq 16 \qquad ↯ \qquad \Rightarrow \text{nein}$$

kann gelten

Frage: Gilt in allen kommutatativen Ring mit Eins

$$\forall x, y \in R : (x+y) \cdot (x+y) = x^2 + x \cdot y + x \cdot y + y^2$$

$$(x+y) \cdot (x+y) = (x+y) \cdot x + (x+y) \cdot y$$
$$= x \cdot x + y \cdot x + x \cdot y + y \cdot y$$
$$= x \cdot x + x \cdot y + x \cdot y + y \cdot y \qquad \Rightarrow \text{ja}$$

distributiv Gesetz
kommutativ Gesetz

8.1 Ringe, Körper

21. Juni 17

DEFINITION: $\underline{R} = (R, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper $:\Leftrightarrow$

(1) $\underline{R}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

(2) $\forall x \in R : (x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in R : x \cdot y = 1)$

(3) $|R| \geq 2$.

$\exists a \in R \; \exists b \in R : a \neq b.$

Bsp.: für Körper

- $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper
- $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper
- $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper

$$x = a + bi \qquad a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = 1 + 0i$$

$$\text{I}: a \cdot c - b \cdot d = 1$$

$$\text{II}: b \cdot c + a \cdot d = 0$$

$$b\text{I} + a\text{II}: (-b^2 - a^2) \cdot d = b$$

$$d = \frac{-b}{a^2+b^2} \qquad c = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$(a-bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i\right) = 1 + 0i$$

- $(\mathbb{Z}_2, +, -, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$

$\mathbb{Z}_2 = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$

+	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$

$\cdot$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$

$-$	
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$

Das ist ein Körper mit 2 Elementen.

isomorph = Elemente gleich, unterschiedliche Benennung

- $(P(\{1\}), \Delta, id, \cap, \emptyset, \{1\})$

ist ein 2-el. Körper

Δ	$\emptyset$	$\{1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

$\cap$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$

Potenzmenge

$$P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

SATZ: Sei $\underline{K} = (K, +, -, \cdot, 0, 1)$ Körper und sei $x \in K \setminus \{0\}$. Dann gibt es genau ein $y \in K$ mit $x \cdot y = 1$.

Beweis: Die Existenz eines y steht in der Definition

Eindeutigkeit:

Seien $y_1, y_2 \in K$ so, dass $x \cdot y_1 = x \cdot y_2 = 1$.

Beweis wie inverse einer Matrix

Dann gilt: $y_1 = y_1 \cdot 1 = y_1 \cdot (x \cdot y_2)$
$= (y_1 \cdot x) \cdot y_2$
$= (x \cdot y_1) \cdot y_2$
$= 1 \cdot y_2 = y_2$

SATZ: Sei $\underline{K}$ Körper, und seien $x, y \in \underline{K}$.
Wenn $x \cdot y = 0$, so ist $x = 0$ oder $y = 0$.

Beweis: Seien $x, y \in K$ mit $x \neq 0$ und $x \cdot y = 0$.
Wir zeigen, dass dann $y = 0$ ist.
Es gibt $z \in K$ mit $z \cdot x = 1$.
Da $x \cdot y = 0$, gilt $z \cdot (x \cdot y) = z \cdot 0 = 0$,
also $0 = z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y$

Bei Matrizen ist das nicht so!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2 Vektorräume

$\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

DEFINITION: $\underline{K}$ ein Körper. Ein Tupel $(V, +, -, \cdot, 0, *)$ heißt <u>Vektorraum über K</u>, wenn

Unterstrich: Menge mit Operationen

- V ist eine nichtleere Menge,
- $+ : V \times V \to V$ ⇒ zweistellige Operation
- $- : V \to V$ ⇒ einstellige Operation
- $0 \in V$
- $* : K \times V \to V$, und

• für alle $x, y, z \in V$ für alle $\alpha, \beta \in K$ gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & (x+y)+z = x+(y+z) \\ (2) & 0+x = x \\ (3) & (-x)+x = 0 \\ (4) & x+y = y+x \end{array}\right\} (V, +, -, 0) \text{ ist abelsche Gruppe}$$

⇒ Rechenregel der Addition

(5) $\alpha * (\beta * x) = (\alpha \cdot \beta) * x$

(6) $(\underset{\substack{\uparrow \\ + \text{ in } K}}{\alpha + \beta}) * x = \alpha * x \underset{\substack{\uparrow \\ + \text{ von Vektoren}}}{+} \beta * x$

(7) $\alpha * (x+y) = \alpha * x + \alpha * y$

(8) $1 * x = x$

Bsp.: • $\mathbb{R}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

für alle $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

• Sei U ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Dann ist

$$(U, +|_{U \times U}, -|_U, 0, *|_{K \times U})$$

ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

• Sei $\mathbb{R}^{[0,1]} = \{ f \mid f: [0,1] \to \mathbb{R} \}$

$(f+g)x = f(x) + g(x)$ für $f, g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, $x \in [0,1]$

$(\alpha * f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ für $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, $x \in [0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \text{alle } x_i \in \mathbb{R} \}$ Vektorraum aller Zahlenfolgen

$(1, 2, 0, 1, \dots)$

$(0, 1, 1, 0, \dots)$

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} := (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

$$\alpha \cdot (x_i)_{i\in\mathbb{N}} := (\alpha \cdot x_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

DEFINITION: Sei V ein Vektorraum über K. U ist ein Unterraum von V, wenn

(1) $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$

(2) $\forall u_1, u_2 \in U: u_1 + u_2 \in U$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall u \in U: \alpha * u \in U$.

Haben unendliche Vektorräume endliche Unterräume?

NEIN: $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Basis: $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}\}$

keine Basis: $\left.\begin{matrix} ((1,0,0,\ldots), \\ (0,1,0,\ldots), \\ (0,0,1,\ldots), \ldots) \end{matrix}\right\}$ ← In der linearen Hülle dieser „Einheitsfolgen" liegen nur jene Folgen, die nur endlich viele Nichtnuller haben

⇒ Man weiß, dass es eine Basis gibt, kann auch bewiesen werden, „gesehen" hat sie noch keiner.