

Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
8. Übungsblatt für den 18. und 19.5.2017

57. Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Laut Satz 6.14 sind diese genau dann linear abhängig, wenn ein bestimmtes Gleichungssystem eine von 0 verschiedene Lösung hat. Geben Sie dieses Gleichungssystem explizit an und finden Sie eine derartige Lösung.
- (b) Verwenden Sie diese Lösung, um ein $k \in \{1, \dots, 4\}$ zu finden, sodass $b_k \in L(b_1, \dots, b_{k-1})$.
- (c) Verwenden Sie nun umgekehrt das soeben konstruierte k , um mit Satz 6.14 zu zeigen, dass $b_1, \dots, b_k$ linear abhängig sind.
- (d) Schließen Sie nun daraus, dass dann auch $b_1, \dots, b_4$ linear abhängig sind.

58. Verwenden Sie die Erfahrung der vorigen Aufgabe, um auf diese Weise Satz 6.15 allgemein zu beweisen.

59. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Sind die Vektoren a, b linear unabhängig, und sind auch die Vektoren b, c linear unabhängig, dann sind auch a, c linear unabhängig.
- (b) Sind die Vektoren a, b linear abhängig, und sind auch die Vektoren b, c linear abhängig, dann sind auch a, c linear abhängig.
- (c) Sind die Vektoren a, b, c linear abhängig, dann sind auch a, b linear abhängig.
- (d) Sind die Vektoren a, b, c linear unabhängig, dann sind auch a, b linear unabhängig.

60. Finden Sie eine Basis B der Ebene $L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, die weder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ noch $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält.

61. Bestimmen Sie eine Basis von $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

62. Finden Sie jeweils eine Basis folgender Unterräume:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \right\};$

(b) $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right);$

(c) $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$

63. Seien $n \in \mathbb{N}$, und B eine Folge linear unabhängiger Vektoren von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass es stets einen Unterraum U gibt, sodass B eine Basis von U ist.

64. Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, und sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Sei

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_k)$$

eine linear unabhängige Folge von Vektoren aus M . Nehmen Sie weiters an, dass B maximal mit dieser Eigenschaft ist, d.h., dass es kein $m \in M$ gibt, sodass $(b_1, b_2, \dots, b_k, m)$ ebenfalls linear unabhängig ist. Zeigen Sie nun, dass B eine Basis für $L(M)$ ist.