Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
7. Übungsblatt für den 12. und 13.5.2017

Am 4.5.2017 finden keine Übungen zur Linearen Algebra an der JKU statt. Aus diesem Grund werden auch am 5.5.2017 an der PH OÖ keine neuen Übungsaufgaben vorgeführt. Die beiden Übungstermine (5.5.2017 von 11:30 bis 13:00 bzw. von 15:45 bis 17:15 jeweils SR 13, 1.Stock) werden für Wiederholungen bzw. Fragen verwendet.

49. Vervollständigen Sie die folgenden Begründungen dafür, dass die Menge

$$T = \{\alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

die Unterraumeigenschaften (1) und (2) aus Definition 6.1 erfüllt.

(a) T enthält zumindest ein Element, weil ____________________ .

(b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $t \in T$ liegt $\lambda \cdot t$ in T:
Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $t \in T$. Wir wollen zeigen, dass ____________ in _______ liegt. Da t in T liegt, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $t = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Um zu zeigen, dass $\lambda \cdot t$ in T liegt, müssen wir ein $\alpha' \in \mathbb{R}$ finden, sodass $\lambda \cdot t = \alpha' \cdot$ ____________ . Nun wissen wir, dass $t = \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Daher gilt $\lambda \cdot t =$ ____ .
Das heißt, dass für $\alpha' =$ _______ gilt: $\lambda \cdot t = \alpha' \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Daher liegt auch ____________ in T.

(c) Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass T auch die Unterraumeigenschaft (3) erfüllt.

50. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.

(a) $T_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -12 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(b) $T_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Interpretieren Sie die Unterräume/Mengen auch geometrisch.

51. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^2$? Geben Sie jeweils an, welche Unterraumeigenschaften erfüllt sind.

(a) $T_3 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 0\}$

(b) $T_4 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^2 = 0\}$

52. Testen Sie, ob $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt.

53. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

54. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \\ 10 & -7 & -16 & -24 \\ -12 & -2 & 40 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 56 \\ -88 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

55. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ -28 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die Lösungsmenge parametrisiert an.

56. Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 14 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$