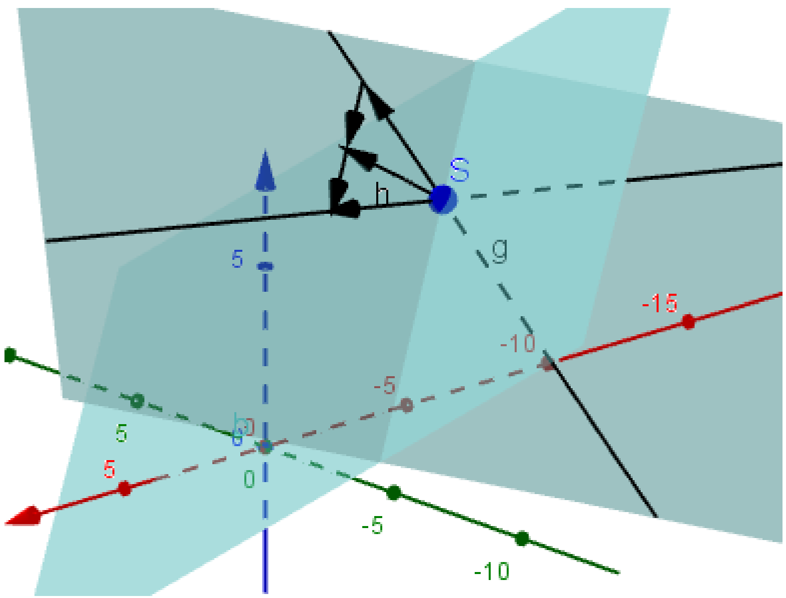
Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
6. Übungsblatt für den 27. und 28.4.2017

41. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $\epsilon : x + 3y + z = 4$ zuläuft, wird an der Ebene reflektiert.

    (a) In welchem Punkt S trifft der Lichtstrahl auf die Ebene?

    (b) Auf welcher Geraden h verläuft der reflektierte Strahl? (*Hinweis:* Verwenden Sie Satz 1.10)



42. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

    (a) Zeigen Sie die sogenannte Lagrange-Identität

    $$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle$$

    (b) Folgern Sie daraus die Ungleichung $\|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

43. Wir betrachten die Menge $M := \{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \}$.

    Zeigen Sie, dass die Summe und das Produkt zweier Elemente in M wieder in M liegt.

44. Seien A und B invertierbare Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A \cdot B = B \cdot A$. Zeigen Sie

   (a) $A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$

   (b) $A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A$

   (c) $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

45. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad \neq bc$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar ist mit
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

46. Sei A eine $m \times m$-Matrix, für die es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A^n = 0$ gibt und sei E die $m \times m$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass $E - A$ invertierbar ist. (*Hinweis:* Denken Sie beim Auffinden der inversen Matrix an $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.)

47. (a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 6 \\ -3 & -2 & 3 \\ -9 & -7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems
$$\begin{array}{rrrcr} x & -y & -z & = & -1 \\ 2x & -2y & +z & = & 4 \\ -2x & +2y & +5z & = & 8 \end{array}$$
   Interpretieren Sie die Lösung geometrisch.

48. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme, interpretieren Sie die einzelnen Gleichungen geometrisch als Ebenen und untersuchen Sie deren gegenseitige Lage:

   (a)
$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -2y & +2z & = & -1 \\ 2x & -2y & -z & = & -4 \\ 3x & -3y & +z & = & -5 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & +y & -z & = & 4 \\ 2x & +2y & -2z & = & -4 \end{array}$$