Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
4. Übungsblatt für den 30. und 31.3.2017

25. In der Ebene sei die Gerade g durch ihre *hessesche Normalform* gegeben, d.h., gegeben sind eine Zahl $d \geq 0$ und ein Vektor $\vec{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$ der Länge 1, sodass die Gerade durch

$$g : n_1 x + n_2 y = d$$

definiert ist. Welche geometrische Bedeutung haben d und $\vec{n}$? Leiten Sie eine Formel her, die zu jedem Punkt P dessen Abstand von g angibt.

26. (a) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ genau dann, wenn $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist.

    (b) Zeigen Sie, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

    (c) Bestimmen Sie $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, sodass $\|\vec{a} \times \vec{b}\| < \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

    (d) Bestimmen Sie $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, sodass $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

    (e) Für welche $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$?

27. Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds durch $|\langle \vec{a} \times \vec{b}\,,\ \vec{c} \rangle|$ gegeben ist.
Hinweis: Ein Parallelepiped ist das dreidimensionale Analogon zum Parallelogramm. Es handelt sich also um ein schiefes Prisma mit Parallelogrammen als Grund- und Seitenflächen, wobei gegenüberliegende Seitenflächen parallel und deckungsgleich zueinander sind.

28. Im Raum seien die folgenden vier Punkte gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h in den folgenden Fällen:

(a) g enthält A und D, h enthält B und C

(b) g enthält A und B, h enthält C und D

(c) g enthält A und C, h enthält B und D

Welche geometrische Figur bilden diese vier Punkte?

29. Bestimmen Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine implizite Darstellung der Ebene, die die Punkte A, B, C der vorigen Aufgabe enthält. Überprüfen Sie, ob der Punkt D ebenfalls in dieser Ebene liegt.

30. Bestimmen Sie den Abstand der folgenden beiden Geraden im Raum:

$$g : X = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h : X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Der Abstand zweier Geraden wird entlang einer Verbindungslinie gemessen, die normal auf beide Geraden steht.

31. Ein Planet bewegt sich kreisförmig um einen Stern, wobei ein Umlauf 10 Jahre dauert. Der Planet befindet sich zu drei verschiedenen Zeitpunkten an folgenden Orten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Position des Sterns. Berechnen Sie weiters die Geschwindigkeit des Planeten in km/h. Eine Koordinateneinheit entspreche dabei einer Astronomischen Einheit: $1\,\mathrm{AE} = 149\,597\,870{,}7\,\mathrm{km}$.

32. Es sei t eine reelle Zahl, und A und B seien $m \times n$-Matrizen. Beweisen Sie

$$t \cdot (A + B) = t \cdot A + t \cdot B.$$