Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
3. Übungsblatt für den 23. und 24.3.2017

17. (a) Die Punkte $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ legen eine Gerade g fest.
Bestimmen Sie eine Parameterform dieser Geraden und verwandeln Sie diese anschließend in eine Gleichungsform.
- (b) Bestimmen Sie die Gleichung jener Geraden h in Parameterform, die zu g parallel ist und durch den Punkt $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ geht.
- (c) Bestimmen Sie in Gleichungsform jene Gerade f , die durch den Punkt P geht und normal auf die Gerade g steht.
- (d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von f und g .
18. (a) Welche Lage haben die Geraden g_1 und h_1 zueinander?
 $g_1 : 2x - 5y = 17, h_1 : 4x - 10y = 4$
- (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_2 mit h_2 !
 $g_2 : 5x - 4y = -3, h_2 : X = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
- (c) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g_2 und h_2 !
19. Gegeben sind der Punkt P und die Gerade g :
 $P = \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \end{pmatrix}, g : X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$
- (a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g .
- (b) Bestimmen Sie die Gleichung jener Geraden h , die parallel zu g ist und den gleichen Abstand zu g hat wie g zum Punkt P (es gibt zwei Lösungen).
20. Bestimmen Sie den Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ mit
 $A = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \end{pmatrix}.$
- Hinweis:* Sind $\vec{c} = \vec{AB}$ und $\vec{b} = \vec{AC}$, dann ist $\vec{c}_0 + \vec{b}_0$ der Richtungsvektor der Winkelsymmetralen beim Winkel α , wobei $\vec{c}_0$ der Einheitsvektor des Vektors $\vec{c}$ ist. Warum gilt dies?
21. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit
 $A = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$

- (a) Zeigen Sie, dass sich die Schwerlinien des Dreiecks $\triangle ABC$ in einem Punkt schneiden, und berechnen Sie diesen Schwerpunkt.

Hinweis: Schwerlinien sind die Strecken von den Seitenmittelpunkten zu den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks.

Schneiden Sie zuerst zwei Schwerlinien und überprüfen Sie, ob der Schnittpunkt auch auf der dritten Schwerlinie liegt.

- (b) Berechnen Sie in welchem Verhältnis der Schwerpunkt die Schwerlinien teilt.

22. Ein Schiff A verlässt den Hafen $H_A = \begin{pmatrix} 50 \\ 12 \end{pmatrix}$ (alle Längenangaben in km) und fährt mit 26 km/h in Richtung $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Ein zweites Schiff B verlässt den Hafen $H_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \end{pmatrix}$ und fährt mit 30 km/h in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (a) In welchem Punkt schneiden sich die Wege der beiden Schiffe?
(b) Kollidieren die Schiffe, wenn beide um 8:00 Uhr losgefahren sind?
(c) Bestimmen Sie die Orte der beiden Schiffe jeweils um 8:00 Uhr, 9:00 Uhr und 10:00 Uhr und berechnen Sie die Verbindungsvektoren. Was fällt auf?
(d) Wie konnte früher ein Kapitän nur mit Hilfe von einem Kompass feststellen, ob sich sein Schiff auf einem Kollisionskurs zu einem anderen Schiff befindet?

23. Zeigen Sie für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

- (a) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 4\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
(b) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Rightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$
Was bedeutet diese Gleichung geometrisch?

24. Zeigen Sie für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$:

- (a) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$
Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch?
Hinweis: Quadrieren Sie die Ungleichung (warum erlaubt?) und verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
(b) Für welche $\vec{a}, \vec{b}$ gilt die Gleichheit?