Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
2. Übungsblatt[1] für den 16. und 17.3.2017

9. Direkt am gegenüberliegenden Ufer eines Flusses sieht eine Person mit $1.65m$ Augenhöhe die Spitze eines Baums unter einem Höhenwinkel von $10°$. Die Aufgabe der Person ist es, die Höhe dieses Baums zu berechnen. Allerdings ist die Flussbreite noch unbekannt. Dazu steckt die Person direkt am Ufer eine Standlinie AB mit einer Länge von $15m$ ab. Dadurch erhält die Person ein Dreieck ABC (mit üblicher Beschriftung) wobei C der Fußpunkt des Baumes ist. Durch Messung erhält die Person die Winkel $\alpha = 80°$ und $\beta = 75°$. Wie hoch ist der Baum?

10. Von einem Dreieck kennt man die 3 Eckpunkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.
    (a) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks.
    (b) Berechnen Sie die Winkeln im Dreieck.
    (c) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.

11. Von einem gleichseitigen Dreieck (Beschriftung wie üblich, $a = b$) kennt man die Eckpunkte $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Die Höhe durch die Spitze C auf die Seite c beträgt $h = 2\sqrt{10}$. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze C (es gibt 2 Lösungen).

12. Beweisen Sie, dass das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften erfüllt:
    (a) $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle \ = \ \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle.$
    (b) $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle \ = \ \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle.$

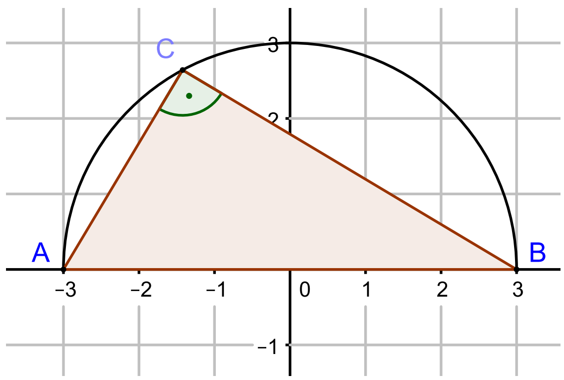
13. In einem Parallelogramm (Beschriftung wie üblich) mit Seitenlängen a, b und Diagonalenlängen e, f gilt: $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$.
    (a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Cosinussatzes.

[1] Erstellung des Blattes mit LaTeX (Leslie Lamport, *LATEX: a document preparation system*, Addison-Wesley 1986, 2. Auflage 1994) und der Skizze mit Geogebra (Markus Hohenwarter et al., *Geogebra*, https://www.geogebra.org/).

(b) Sei $\vec{e} = \vec{AC}$ und $\vec{f} = \vec{BD}$. Dann lässt sich dieser Satz auch mit Hilfe von Skalarprodukten beweisen, wobei $a = \|\vec{a}\| = \|\vec{AB}\|$, $b = \|\vec{b}\| = \|\vec{BC}\|$. Führen Sie diesen Beweis aus.

14. Von einem allgemeinen Viereck $ABCD$ kennt man die Länge der Seite $a = AB = 35m$, $b = BC = 30m$, $c = CD = 57m$ und $d = DA = 20m$. Der Winkel α beim Eckpunkt A beträgt $110°$. Berechnen Sie die Fläche des Vierecks.

15. Zeigen Sie (Satz von Thales): Die Winkel im Halbkreis sind rechte. (Vgl. Skizze). *Hinweis:* Nehmen Sie $\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als Eckpunkte des Dreiecks an und berechnen Sie ein Skalarprodukt.



16. Zeigen Sie: Im rechtwinkeligen Dreieck liegt der Umkreismittelpunkt auf der Hypotenuse.
Hinweis: Gehen Sie folgendermaßen vor: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $c = AB$ die Hypotenuse. legen Sie das rechtwinklige Dreieck in ein 2-dimensionales Koordinatensystem, so dass die Seite c auf der x-Achse und der Mittelpunkt U der Strecke c genau im Koordinatenursprung liegt. Nehmen Sie $\begin{pmatrix} -\frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als Eckpunkte des Dreiecks an und weisen Sie nach, dass $\|\vec{CU}\| = \frac{c}{2}$.
Inwiefern unterscheidet sich Aufgabe 16 von Aufgabe 15?