Musterlösungen

26. (a) z.z.: $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} = 0 \quad \vee \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \vec{b} = \lambda \vec{a}$

„ $\implies$ " : Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = 0$

Dies führt auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I: } & a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0 \\ \text{II: } & a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0 \\ \text{III: } & a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann nur erfüllt sein, falls $\vec{a} = 0$ bzw. wenn $\vec{a} \neq 0$, also z.B. $a_1 \neq 0$, ist, so muss $b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2$ und $b_3 = \frac{b_1}{a_1} a_3$ gelten (für beliebiges b_1). Somit ist $\vec{b} = \frac{b_1}{a_1} \vec{a}$, also ein Vielfaches von $\vec{a}$. Analog folgert man die Fälle $a_2 \neq 0$ und $a_3 \neq 0$.

„ $\impliedby$ " : Dass für $\vec{a} = 0$ folgt, dass $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ist, ist offensichtlich. Seien also für den zweiten Fall $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $\vec{b} = \lambda \vec{a}$. Dann folgt damit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \lambda a_3 - a_3 \lambda a_2 \\ a_3 \lambda a_1 - a_1 \lambda a_3 \\ a_1 \lambda a_2 - a_2 \lambda a_1 \end{pmatrix} = 0$$

(b) z.z.: $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$
Mit Satz 1.15. aus dem Skript gilt:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2$$

Da Normen nichtnegativ sind, liefert Wurzelziehen auf beiden Seiten die Behauptung.

(c) Wähle $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit gilt:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{2} < \sqrt{3} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

(d) Wähle $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit gilt:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 1 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

(e) $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$ gilt genau dann wenn $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 0$ gilt, also wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen.

27. Seien $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$. z.z.: das Volumen des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds ist $V_{a,b,c} = |\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle|$
Wenn G die Grundfläche des Parallelepipeds beschreibt und h die Höhe, dann ist $V_{a,b,c} = G.h$. Nachdem G ein Parallelogramm mit den Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, gilt $G = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$. h ist die Höhe eines Parallelogramm mit den Seiten $\vec{a}$ und $\vec{c}$, deshalb lässt sich h schreiben als $h = \|\vec{c}\|\cdot|\cos\varphi|$, wobei φ der Winkel zwischen $\vec{c}$ und der Höhe h ist. Dadurch lässt sich $V_{a,b,c}$ schreiben als

$$V_{a,b,c} = G.h = \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cdot|\cos\varphi|$$

Nachdem $\vec{a}\times\vec{b}$ normal steht auf G und somit in die selbe Richtung zeigt wie h, kann φ auch als Winkel zwischen $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgefasst werden. Mit Satz 1.13. ergibt sich dann schließlich

$$V_{a,b,c} = |\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle|$$

31. Die Position S des Sterns ist der Mittelpunkt des Kreises auf dem die Punkte A, B und C liegen. Diesen kann man als Schnittpunkt der drei Ebenen E_{AB} und E_{BC} und E_{ABC} berechnen, wobei E_{AB} und E_{BC} die Mittellotebene (das dreidimensionale Analogon zur Streckensymmetrale) zwischen den Punkten A und B bzw. B und C beschreibt und E_{ABC} jene Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen. Dies liefert:

$$\begin{aligned} E_{AB} &: -3x - 3y = -6 \\ E_{BC} &: -x - 2y + z = 2 \\ E_{ABC} &: -3x + 3y + 3z = 6 \end{aligned}$$

Damit erhält man als Lösung für $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Als Umfang U der Umlaufbahn ergibt sich damit $U = 2\pi\sqrt{42} \approx 40,72$ AE und damit eine Umlaufgeschwindigkeit v von $v = 69\,539,1$ km/h (bei Rechnung ohne Berücksichtigung von Schaltjahren)

40. z.z. E_m ist die einzige Matrix, sodass für alle $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ gilt, dass $E_m\cdot A = A$.
Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ eine Matrix, sodass für alle $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ gilt, dass $B\cdot A = A$. Dann ist zu zeigen, dass $B = E_m$

gelten muss, also dass $B(i,i) = 1$ und $B(i,j) = 0$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Per Voraussetzung gilt:

$$A(i,j) = \sum_{k=1}^{m} B(i,k) \cdot A(k,j) = B(i,i) \cdot A(i,j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} B(i,k) \cdot A(k,j) \quad (1)$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$
Um zu zeigen, dass alle Nicht-Diagonaleinträge von B gleich 0 sein müssen, sei $B(i,k)$ beliebig mit $i \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Nachdem (1) für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt, gilt es insbesondere auch für eine Matrix A, deren Einträge alle 0 sind bis auf $A(k,j) = 1$ für ein $j \neq k$. Damit vereinfacht sich (1) zu:

$$A(i,j) = 0 = B(i,k) \cdot 1$$

Dies kann offensichtlich nur erfüllt sein, wenn $B(i,k) = 0$ gilt. Somit folgt, dass alle Nicht-Diagonaleinträge von B gleich 0 sind und damit aus (1) auch direkt, dass die Diagonaleinträge alle 1 sein müssen. Also ist $B = E_m$.