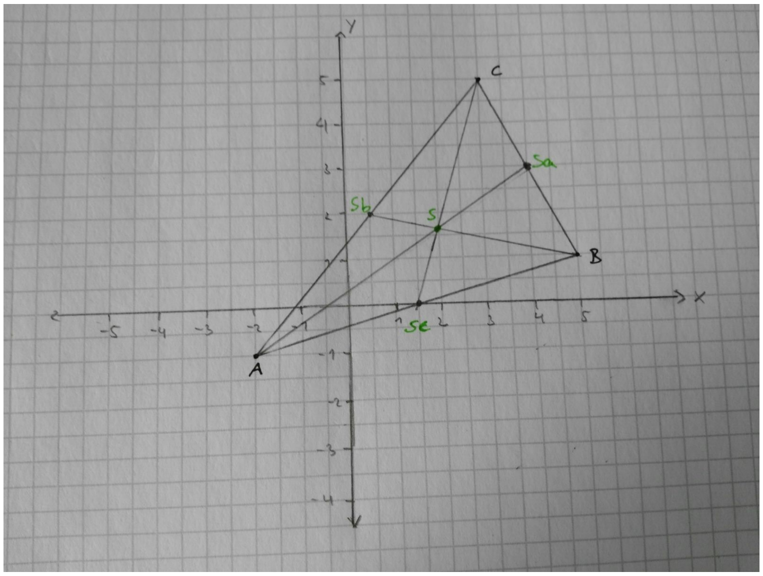
Aufgabe 21

(a)

Dass sich die Schwerlinien genau in einem Punkt schneiden, lässt sich in diesem Fall zeichnerisch sehr leicht zeigen.



Den Schwerpunkt(= Schnittpunkt der Schwerlinien) lässt sich wie folgt berechnen:

$$S = \frac{A+B+C}{3}$$

Hier ist der Schwerpunkt S also:

$$\frac{\begin{pmatrix} -2+5+3 \\ -1+1+5 \end{pmatrix}}{3}$$

(b)

Zuerst berechnen wir uns die Länge von den einzelnen Schwerlinien, dann die Länge der Vektoren vom Schwerpunkt zu den Eckpunkten. Zuletzt teilen wir noch die einzelnen Längen und werden dann sehen, dass das Verhältnis bei allen 3 Schwerlinien bei 1:2 liegt.

Vektoren:

$\vec{a} = sa - A = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = sb - B = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = sc - C = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = s - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 8/3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e} = s - B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f} = s - C = \begin{pmatrix} -1 \\ -10/3 \end{pmatrix}$

Länge der Vektoren:

$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{52} \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{21,25} \quad \|\vec{c}\| = \sqrt{27,25}$

$\|\vec{d}\| = \sqrt{23,1} \quad \|\vec{e}\| = \sqrt{9,4} \quad \|\vec{f}\| = \sqrt{12,1}$

Dividieren:

$\frac{\|\vec{d}\|}{\|\vec{a}\|} = 2/3 \quad \frac{\|\vec{e}\|}{\|\vec{b}\|} = 2/3 \quad \frac{\|\vec{f}\|}{\|\vec{c}\|} = 2/3$

Also teilt der Schwerpunkt die jeweiligen Schwerlinien immer im Verhältnis 1 : 2.

Aufgabe 23

(a)

$$\begin{aligned} \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 &\Leftrightarrow \\ \langle a + b, a + b\rangle - \langle a - b, a - b\rangle &\Leftrightarrow \\ \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle - \langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle - \langle b, b\rangle &\Leftrightarrow \\ 4\langle a, b\rangle &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 &= \\ \langle a - b, a - b\rangle &= \\ \langle a, a\rangle - 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle &\overset{*}{=} \\ \langle a, a\rangle + \langle b, b\rangle &= \\ \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 & \end{aligned}$$

* Da laut Voraussetzung $\langle a, b \rangle = 0$

Geometrische Bedeutung:
Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal aufeinander stehen, dann gilt:
Das Quadrat der Länge der Differenz der Vektoren ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Längen.

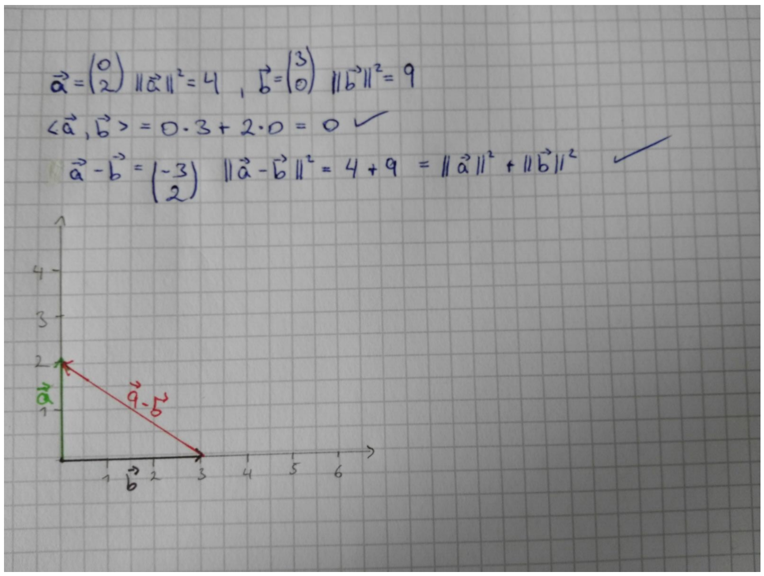


Abbildung 1: Beispiel

Aufgabe 24
(a)
Quadrieren ist erlaubt, da beide Seiten immer ≥ 0 sind und sich somit nichts ändert.

$$
\begin{aligned}
\|a+b\|^2 &= \\
\langle a+b, a+b\rangle &= \\
\langle a, a\rangle + 2\langle a, b\rangle + \langle b, b\rangle &= \\
\|\vec{a}\|^2 + 2\langle a, b\rangle + \|\vec{b}\|^2 &\overset{*}{\leq} \\
\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 &= \\
(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2 &
\end{aligned}
$$

* Hier wurde die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendet.

Geometrische Bedeutung:
Die Summe der Längen zweier Seiten a und b ist stets mindestens so groß wie die Länge der dritten Seite c = a+b.

(b)
Um hier Gleichheit zu zeigen muss also für die Cauchy-Schwarz-Ungleichung Gleichheit gelten. Um diese Gleichheit zu zeigen nehmen wir an, dass $|\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle| = \|\vec{a}\| * \|\vec{b}\|$ gilt. Wir zeigen, dass dann $\vec{b} \neq 0$ gilt, oder dass $\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{b}$ ist. Es gilt $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = \langle\vec{a}, \vec{a}\rangle * \langle\vec{b}, \vec{b}\rangle$. Wenn also $\vec{b} \neq 0$, so gilt:

$$\langle\vec{a} - \frac{\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle}{\langle\vec{b}, \vec{b}\rangle} * \vec{b}, \vec{a} - \frac{\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle}{\langle\vec{b}, \vec{b}\rangle} * \vec{b}\rangle = 0$$

Also gilt $\vec{a} - \frac{\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle}{\langle\vec{b}, \vec{b}\rangle} * \vec{b} = 0$, und somit ist $\vec{a}$ ein Vielfaches von $\vec{b}$.

Nun zeigen wir folgendes: wenn $\vec{b} = 0$ oder $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$ ist, so gilt $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = \|\vec{a}\| * \|\vec{b}\|$. Wenn $\vec{b} = 0$, so sind beide Seiten der Gleichung = 0. Wenn $\vec{b} \neq 0$ und $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, so gilt $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle^2 = \langle\vec{\lambda\vec{b}}, \vec{b}\rangle^2 = \lambda^2\langle\vec{b}, \vec{b}\rangle^2 = \lambda^2\langle\vec{b}, \vec{b}\rangle\langle\vec{b}, \vec{b}\rangle = \langle\lambda\vec{b}, \lambda\vec{b}\rangle * \langle\vec{b}, \vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|^2 * \|\vec{b}\|^2$

Aufgabe 25

<u>Geometrische Bedeutung von $\vec{d}$ und $\vec{n}$:</u>
$\vec{n}$ ist der Normalvektor zur Gerade.
$\vec{d}$ ist der Abstand der Gerade vom Koordinatenursprung.

<u>Formel für den Abstand eines Punktes P von der Gerade g:</u>

Gesucht: Abstand von $P = (x_0|y_0)$ von $g = g : n1x + n2y = d$
Wir legen eine Parallelgerade zu g durch den Punkt P:
$g_2 : n1x + n2y = d_2 \quad \text{mit} \quad g_2 : n1x_0 + n2y_0 = d_2$

Für den Abstand q der beiden Geraden voneinander und damit auch für den Abstand des Punktes P von der Gerade g ergibt sich damit:

$$g = |d1 - d2| \stackrel{*}{=} |d1 - n1x_0 - n2y_0|$$

* Folgt mit der Bedingung für g_2.
Betrag deshalb, weil das Vorzeichen wechselt, wenn der Punkt auf der anderen Seite der Gerade liegt.

Anschaulich: wenn man in der hesseschen Normalform einer Geradengleichung einen Punkt einsetzt, erhält man nicht mehr Null, sondern den Abstand des Punktes von der Gerade.