

Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
12. Übungsblatt für den 29. und 30.6.2017

90. Bestimmen Sie jenen Punkt der Geraden g ,

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right),$$

der dem Punkt $(8, 2, 11, 17)$ am nächsten liegt. Welchen Abstand hat die Gerade von diesem Punkt?

91. Wie weit ist die Ebene

$$\begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

vom Nullpunkt entfernt. Welcher Vektor dieser Ebene hat die kleinste Länge?

92. Bestimmen Sie einen Punkt P von $(0, 1, 2) + L((1, 2, 3))$ und einen Punkt Q von $(-24, -52, 15) + L((-1, 7, 2))$, sodass $\|P - Q\|$ minimal wird.

93. Welcher Punkt der Ebene

$$\begin{pmatrix} -24 \\ -53 \\ 13 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

liegt am nächsten beim Punkt $(-47, -95, 34)$?

94. Welcher Punkt der Ebene

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

kommt der Geraden

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

am nächsten?

95. Es sei R die Menge

- (a) der natürlichen Zahlen,
- (b) der ganzen Zahlen,
- (c) der rationalen Zahlen,
- (d) der reellen Zahlen,
- (e) der 3×3 -Matrizen über den reellen Zahlen,
- (f) der Vektoren im \mathbb{R}^2 ,
- (g) der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ($a, b \in \mathbb{R}$),

jeweils zusammen mit den dafür üblichen Rechenoperationen. Welche davon sind kommutative Ringe mit Eins oder Körper? Welche Eigenschaften sind gegebenenfalls verletzt?

96. Sei $R = \langle \mathbb{Q}^2, +, -, \cdot, (0, 0), (1, 0) \rangle$, wobei die Addition und Subtraktion wie üblich (also komponentenweise) definiert seien, die Multiplikation aber durch

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

Ist R ein Körper? Bestimmen Sie eine Formel für $(a, b)^{-1}$.

97. Sei $\langle R, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie unter genauer Angabe der jeweils benötigten Axiome:

- (a) $0 = -0$;
- (b) $x \cdot (-1) = (-1) \cdot x = -x$, für alle $x \in R$;
- (c) Für alle $x, y \in R$ gilt: Wenn $x \cdot y = 0$, dann ist $x = 0$ oder $y = 0$.