

Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
11. Übungsblatt für den 22. und 23.6.2017

81. Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal steht.

82. Sei $B := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$, und sei E die lineare Hülle von B . B ist dann eine Basis von E . Außerdem bezeichnen wir mit $\bar{B}$ die Matrix

$$\bar{B} := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Welches Gleichungssystem muss ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ erfüllen, der auf alle Vektoren in E normal steht? Wie hängt die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems mit $\bar{B}$ zusammen?

(b) Mit welchem Gleichungssystem können Sie feststellen, ob ein Vektor v in E liegt? Wie hängt die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems mit $\bar{B}$ zusammen?

(c) Sei $w := \begin{pmatrix} 16 \\ 44 \\ -6 \end{pmatrix}$. Finden Sie einen Vektor e , der in E liegt, sodass $w - e$ normal auf alle Vektoren in E steht.

83. Gegeben seien die Vektoren $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z := \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) $\{x\}^\perp$,

(b) $\{x, y\}^\perp$,

(c) $\{x, y, z\}^\perp$

und geben Sie jeweils die Dimension an.

84. Welche Vektoren des $\mathbb{R}^4$ stehen auf alle drei Vektoren $(1, 2, 0, 0)$, $(0, 1, 2, -1)$, $(1, 0, 2, 0)$ normal?
85. Orthonormalisieren Sie die folgende Familie von Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt!

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

86. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) für folgenden Unterraum des $\mathbb{R}^3$!

$$U = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

87. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) für folgenden Unterraum des $\mathbb{R}^4$!

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \wedge x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\}$$

(Hinweis: Berechnen Sie zuerst eine Basis von V und orthonormalisieren Sie diese mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.)

88. Sei $B = (b_1, \dots, b_k)$ eine Orthonormalbasis eines Unterraumes V von $\mathbb{R}^n$. Für alle v und $w \in V$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^k \langle v, b_i \rangle \langle b_i, w \rangle$$

Beweisen Sie zunächst den Satz für $k = 2$. Stellen Sie dazu v und w nach Satz 7.11 mit Hilfe der Orthonormalbasis (b_1, b_2) dar und berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ mit Hilfe der Regeln aus Lemma 7.2. Beweisen Sie anschließend den Satz für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ mit Hilfe des $\sum$ -Quantors.

89. Bestimmen Sie eine Basis von $U + V$ mit Hilfe des Algorithmus 6.75:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

und

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$