Lineare Algebra I (Sommersemester 2017)
355.258, 355.259, SeBMA02x02
10. Übungsblatt für den 8. und 9.6.2017

73. Der Vektor v hat bezüglich der Basis $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix})$ der Ebene ϵ die Koordinaten $(v)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich der Basis $B = (\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 40 \\ -26 \end{pmatrix})$.

74. Die Ebene ϵ hat die Basen $A = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Der Vektor v hat bezüglich B die Koordinaten $(v)_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie seine Koordinaten bezüglich A.

75. Die Ebene e sei durch $e = L(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ gegeben. Sie hat die Basen $B = (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ und $C = (\begin{pmatrix} 24 \\ -2 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 24 \end{pmatrix})$. Der Vektor v ist gegeben durch $(v)_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $(v)_B$.

76. Sei $a = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, und sei $B = (a, b)$. Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b \rangle \end{pmatrix}$ hat; das heißt, zeigen Sie $(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})_B = \begin{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, b \rangle \end{pmatrix}$.

Stimmt diese Formel für jede Basis (a, b) des $\mathbb{R}^2$?

77. Sei $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$, und sei E die lineare Hülle von B. B ist dann eine Basis von E.

   (a) Welcher Vektor w hat bezüglich B die Koordinaten $(w)_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

   (b) Wie lauten die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich B?

   (c) Geben Sie eine Basis C von E an, bezüglich der der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat?

78. Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie zunächst den Nullraum $N(A)$ von A. Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ und geben Sie die Lösungsmenge in der Form $x_0 + N(A)$ an, wobei x_0 eine spezielle Lösung bezeichnet.

79. Widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

   Wenn das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ eine von 0 verschiedene Lösung hat, so besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für jede rechte Seite b zumindest eine Lösung.

80. Sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dann auch $B_1 = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.