

Aufgabe 41

a)

Man schneidet die Ebene ϵ mit der Gerade g . Dazu muss man in die Ebenengleichung die x-, y- und z-Werte der Gerade einsetzen:

$$-10 + \lambda + 3(1 + 2\lambda) + 1 + 3\lambda = 4$$

$$10\lambda = 10$$

$$\lambda = 1$$

Der berechnete Wert für λ wird nun in die Parameterdarstellung der Gerade eingesetzt und liefert:

$$S = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

Um den reflektierten Strahl zu erhalten spiegelt man die Gerade g an der Gerade in Richtung des Normalvektors der Ebene ϵ durch den Punkt S . Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist S . Man muss nun noch den Richtungsvektor der Geraden g spiegeln. Dazu verwendet man Satz 1.10. Dabei ist der Vektor $\vec{a}$ aus dem Satz der Richtungsvektor der Gerade g und der Vektor $\vec{b}$ der Normalvektor der Ebene ϵ .

$$\vec{c} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \vec{b} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{10}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{c}$ ist dann parallel zu $\vec{b}$ und der Vektor $\vec{a} - \vec{c}$ steht normal auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Es gilt offensichtlich $\vec{c} + (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a}$. Den Vektor $\vec{a}$ erhält man also indem man zum Vektor $\vec{c}$ den Vektor $\vec{a} - \vec{c}$ addiert. Will man $\vec{a}$ an der Gerade spiegeln muss man $\vec{c} - (\vec{a} - \vec{c})$ berechnen.

$$\vec{v} = \vec{c} - (\vec{a} - \vec{c}) = 2\vec{c} - \vec{a} = \frac{20}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 \\ 38 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$h = S + \lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 \\ 38 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Da man den Richtungsvektor beliebig skalieren darf vereinfacht sich die Lösung zu

$$h = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 38 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 46

Aus dem Hinweis ergibt sich die Vermutung

$$(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

Das rechnet man einfach nach:

$$(E - A) * \sum_{k=0}^{n-1} A^k = \sum_{k=0}^{n-1} (A^k - A^{k+1}) = A^0 - A^1 + A^1 - A^2 + \dots + A^{n-1} - A^n$$

Die mittleren Summanden heben sich alle gegenseitig auf. Es bleibt also:

$$A^0 - A^n = A^0 = E$$

Aufgabe 47

a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$L = \emptyset$$

Die drei Gleichungen repräsentieren drei Ebenen. Da das Gleichungssystem keine Lösung besitzt haben diese drei Ebenen keine Schnittpunkte. Betrachtet man die Normalvektoren der drei Ebenen stellt man fest, dass keine zwei dieser Ebenen parallel sind. Das bedeutet, dass je zwei dieser Ebenen eine Schnittgerade besitzen, diese Schnittgerade aber parallel zur dritten Ebene verläuft. Daher sind alle drei Schnittgeraden parallel.

Aufgabe 48

a)

$$L = \emptyset$$

Wieder besitzen die drei Ebenen keinen Schnittpunkt und keine zwei davon sind parallel. Es schneiden sich also je zwei Ebenen in einer Geraden und diese drei Geraden sind parallel.

b)

$$L = \emptyset$$

Die drei Ebenen besitzen keinen Schnittpunkt. Die erste und die dritte Ebene sind parallel und voneinander verschieden. Die zweite ist nicht parallel zu ihnen.